R

منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

الهندسة التحليلية في الفراغ

فرع العلوم الرياضية والفيزيائية

الدكتور

محمد وداد طرابيشي

استاذ مساعد في قسم
الرياضيات

لطلاب السنة الاولى

مديرية الكتب والمطبوعات

١٤٢٥ هـ - ٢٠٠٤م

٥

R

منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

الهندسة التحليلية في الفراغ

فرع العلوم الرياضية والفيزيائية

الدكتور
محمد دواد طرابيشي
استاذ مساعد في قسم
الرياضيات

لطلاب السنة الاولى

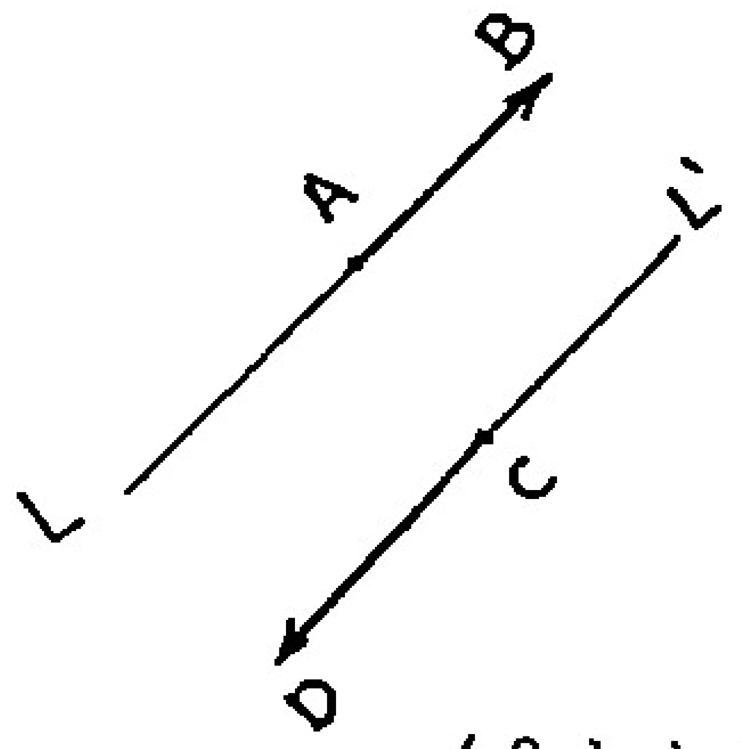
مديرية الكتب والمطبوعات
١٤٢٥ هـ - ٢٠٠٤م

٥

معلومات أساسية في الأشعة

0.1- تعريف الشعاع :

نسمي القطعة الجبرية AB الموجهة من مبدئها A الى نهايتها B بالشعاع AB ونرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ (وبحرف واحد $\overrightarrow{V}$). كما نسمي المستقيم المار من مبدأ الشعاع ونهايته حامل الشعاع (Support) ونسمي كل مستقيم مواز للشعاع منحى الشعاع (Direction).



الشكل (0.1)

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ في الشكل (0.1) هما شعاعان لهما نفس المنحى ومحمولان على مستقيمين متوازيين L ، L' ومختلفان في الاتجاه .

مما سبق نستنتج ان الشعاع يتعين بثلاثة عناصر :

أ- المنحى (Direction)

٢- الاتجاه (Sens)

٣ - الطول (Length) وهو البعد بين مبدأ الشعاع ونهايته ، فنكتب $|\vec{AB}|$ دلالة على طول الشعاع $\vec{AB}$ أو طويلته (Modulus)

وهناك عنصر رابع يتميز به الشعاع هو المبدأ وله أهمية في بحث القوى حيث يطلق عليه اسم نقطة تأثير القوة.

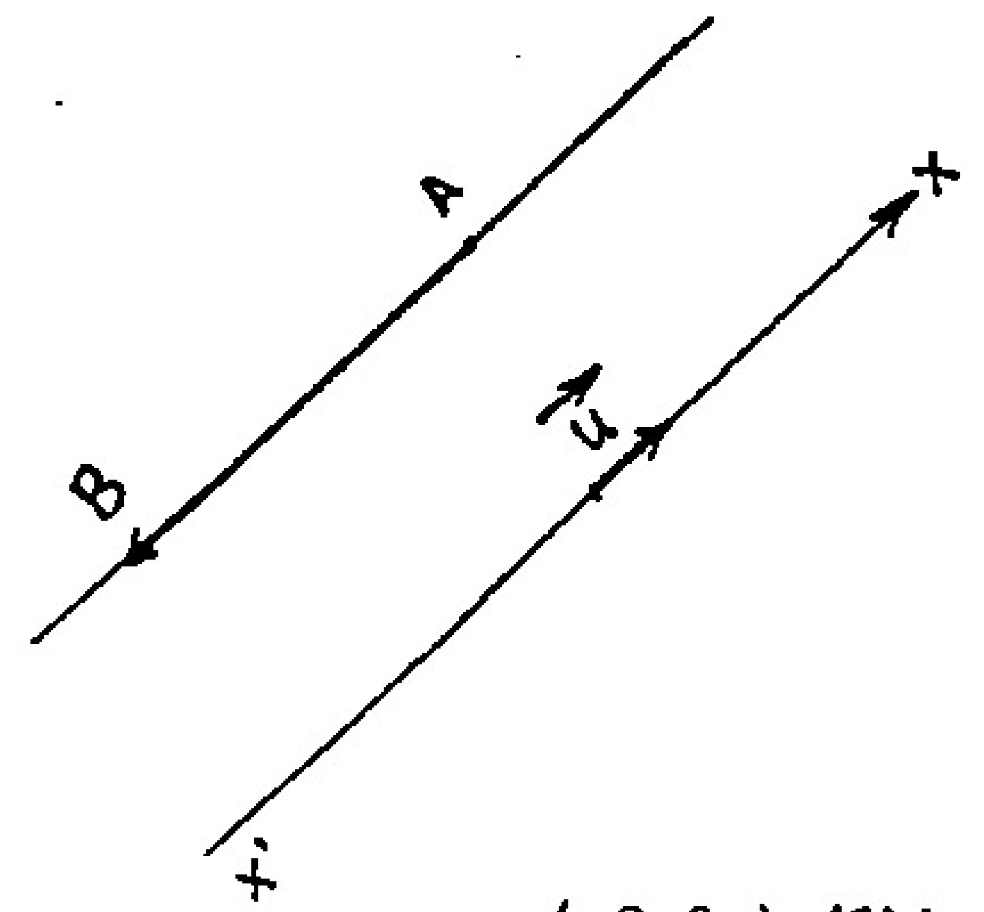
0.2 – أنواع الشعاع :

١- الشعاع المثبت (أو المقيد) :وهو الشعاع الذي تكون جميع عناصره ثابتة .

٢- الشعاع الطليق (او الحر) : اذا انتقل الشعاع $\vec{AB}$ في الفراغ موازيا نفسه عندئذ نسميه بالشعاع الطليق . وبعبارة أخرى اذا تنقل مبدأ الشعاع في الفراغ وبقيت باقي عناصره ثابتة عندئذ نسميه بالشعاع الطليق وبحالة خاصة : اذا تنقل الشعاع $\vec{AB}$ على حامله L عندئذ نسميه بالشعاع المنزلق .

شعاع الواحدة لمحور : هو شعاع طليق حامله المحور او مستقيم يوازيه واتجاهه هو اتجاه المحور وطوله يساوي واحدة الاطوال .

ليكن $\vec{u}$ شعاع الواحدة للمحور x'x وليكن $\vec{AB}$ شعاعا يوازي $\vec{u}$ كما في الشكل (0.2) .

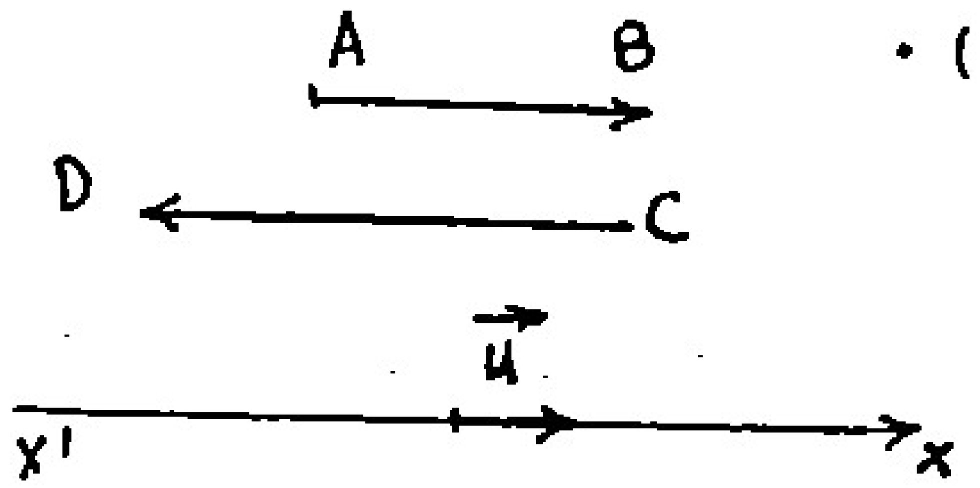


الشكل (0.2)

يوجد عدد جبري واحدفقط K من أجله تتحقق العلاقة :

$$\vec{AB} = K.\vec{u}$$

العدد K يسمى بالقياس الجبري للشعاع $\vec{AB}$. ويمكن ان نقول: ان القياس الجبري للشعاع $\vec{AB}$ بالنسبة لمحور هي النسبة $\frac{\vec{AB}}{\vec{u}}$ بين هذا الشعاع وشعاع الواحدة لهذا المحور . ونرمز للقياس الجبري للشعاع $\vec{AB}$ بالرمز $\overline{AB}$ فاذا كان لدينا الشعاعان المتوازيان $\vec{AB}$ ، $\vec{CD}$ و $\vec{u}$ شعاع الواحدة للمحور x'x الموازي لحامليهما كما في الشكل (0.3) .



الشكل (0.3)

نكتب :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \times \vec{U}$$
$$\overrightarrow{CD} = \overline{CD} \times \vec{U}$$

والنسبة : $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ قيمتها المطلقة $\frac{AB}{CD}$

واشارتها (+) اذا كان $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ من اشارة واحدة وهذا يتحقق عندما يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CD}$ باتجاه واحد .

وتكون اشارة النسبة (-) اذا كان $\overline{AB}$، $\overline{CD}$ من اشارتين مختلفتين وهذا يتحقق عندما يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ باتجاهين متعاكسين.

ونستنتج مما سبق أن النسبة $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ تملك نفس القيمة المطلقة ونفس اشارة النسبة $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ وبذلك يمكننا أن نكتب :

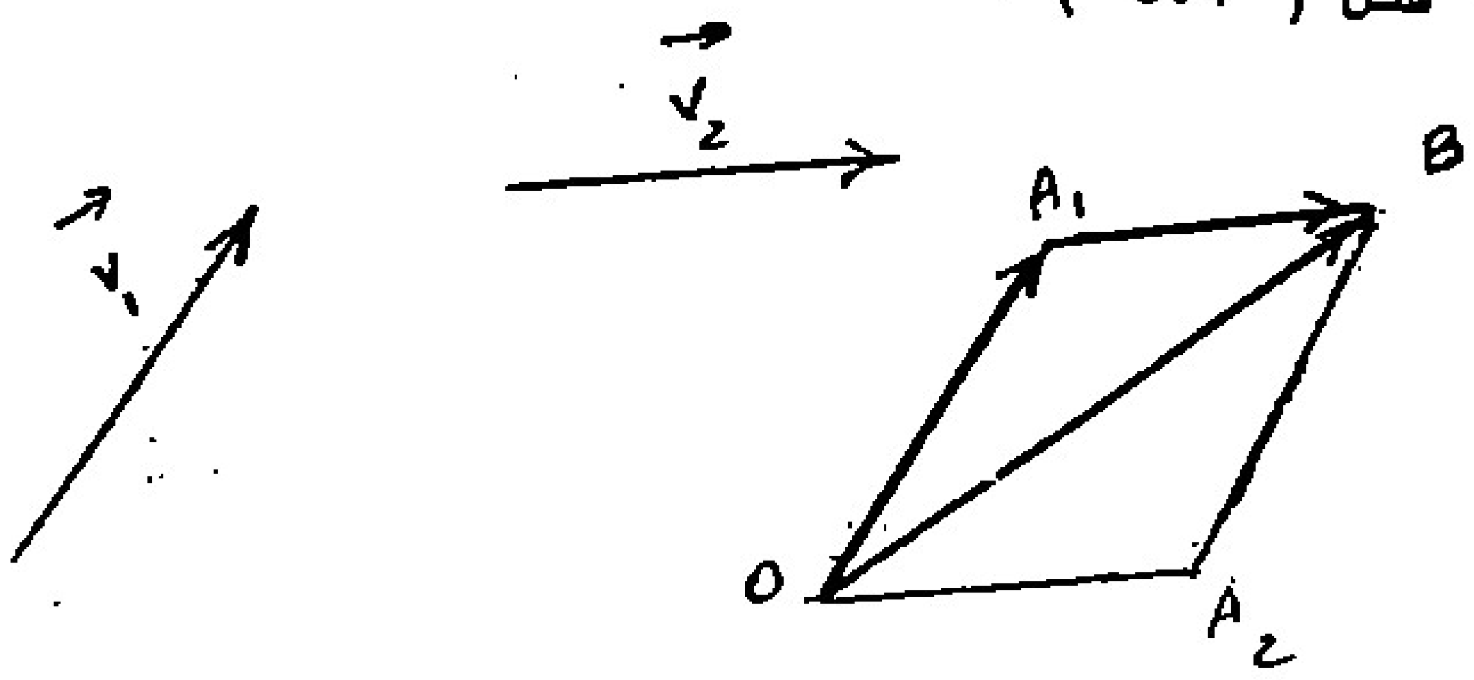
$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

ويمكن ان نقول : ان نسبة شعاعين متوازين تساوي نسبة قياسيهما الجبريين المقدرين بواسطة نفس شعاع الواحدة. وهذه النتيجة مستقلة عن الاتجاه المأخوذ على المحور x'x .

0.3 ـ مجموع شعاعين :

ليكن الشعاعان الطليقان $\vec{V_2}, \vec{V_1}$ ولتكن O نقطة اختيارية، نسمي مجموعا شعاعيا (أو هندسيا) لهذين الشعاعين بالنسبة للنقطة

O ، الشعاع $\overrightarrow{OB}$ الذي نحصل عليه من انشاء الشعاع $\overrightarrow{OA_1}$ مساويا للشعاع $\vec{V_1}$ ثم الشعاع $\overrightarrow{A_1B}$ الذي مبدوءه A_1 والذي يساوي الشعاع $\vec{V_2}$ شكل (0.4) .



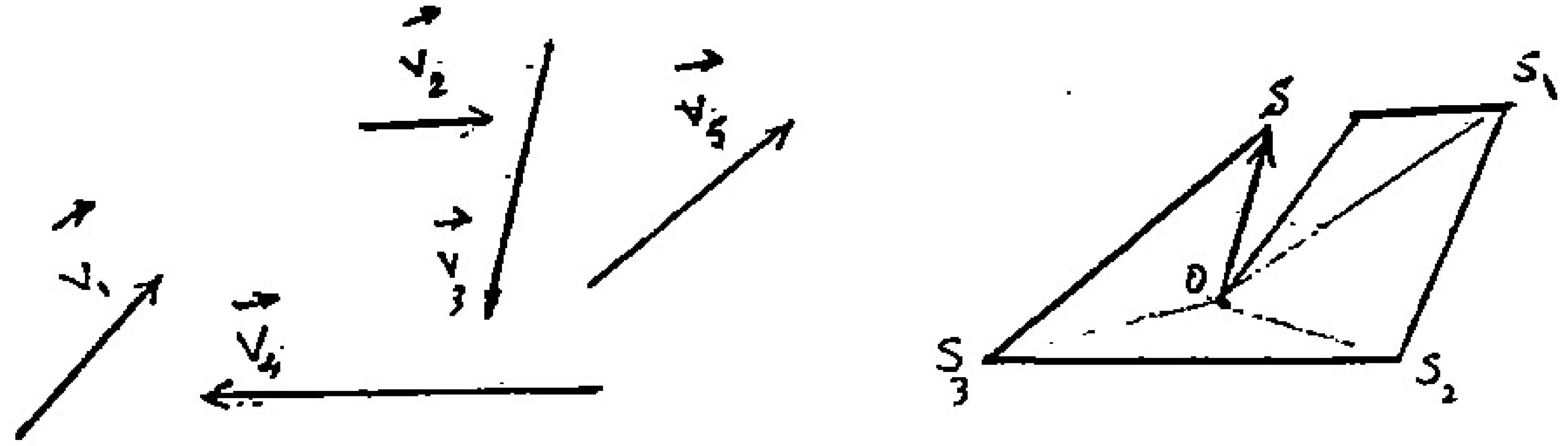
الشكل (0.4)

ونكتب : $\overrightarrow{OB} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

مستخدمين الاشارة (+) التي استخدمناها في جمع الاعداد،ويتمتع جمع الاشعة بنفس خواص الجمع الجبري للاعداد . واذا اعتمدنا نقطة أخرى غير النقطة O نحصل على مجموع يساوي (أو يساير) المجموع السابق .

0.4 ـ مجموع عدة أشعة :

ان المجموع الشعاعي لعدة أشعة : $\vec{V_1}, \vec{V_2}, ..., \vec{V_n}$ المأخوذة بهذا الترتيب يتعين بنفس الطريقة التي تطبق على جمع عدة اعداده فاذا كانت O نقطة اختيارية ، ننشىء أولا المجموع $\overrightarrow{OS_1} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$.



الشكل (0.5)

ثم :المجموع $\vec{OS}_2=\vec{OS}_1+\vec{V}_3$ ثم المجموع $\vec{OS}_3=\vec{OS}_2+\vec{V}_4$

حتى نصل الى المجموع :

$$\vec{OS}=\vec{OS}_{n-2}+\vec{V}_n$$

وأخيرا نكتب :

$$\vec{OS}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3+\dots\dots+\vec{V}_n$$

وعملية الجمع هذه تتمتع بالخواص الاتية :

١- اذا بدلنا النقطة O بنقطة أخرى نحصل على شعاع المجموع يساوي الشعاع الاصلي .

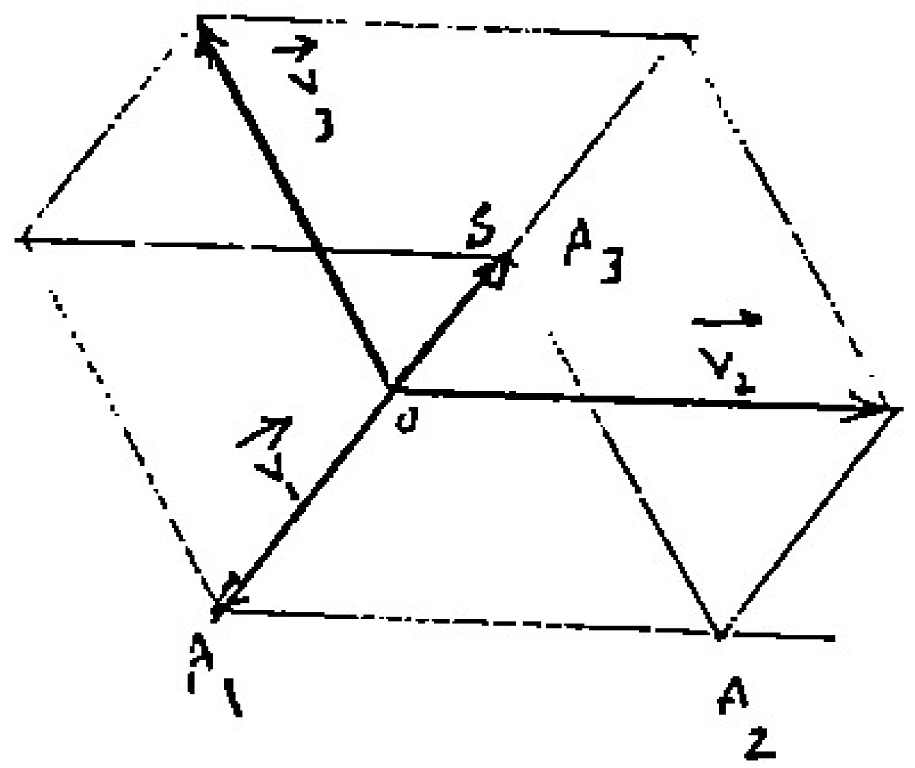
٢- لا يتغير شعاع المجموع اذا استبدلنا شعاعا ما $\vec{V}_K$ بشعاع يساوية .

٣- ان عملية جمع الاشعة عملية تبديلية.

٤- ان عملية جمع الاشعة عملية تجميعية.

حالة خاصة :

ان مجموع ثلاثة اشعة لا توازي مستويا ما هو قطر متوازي السطوح الذي حروفه أشعة تساوي(تساير) الاشعة الثلاثة كما في الشكل (0.6)



الشكل (0.6)

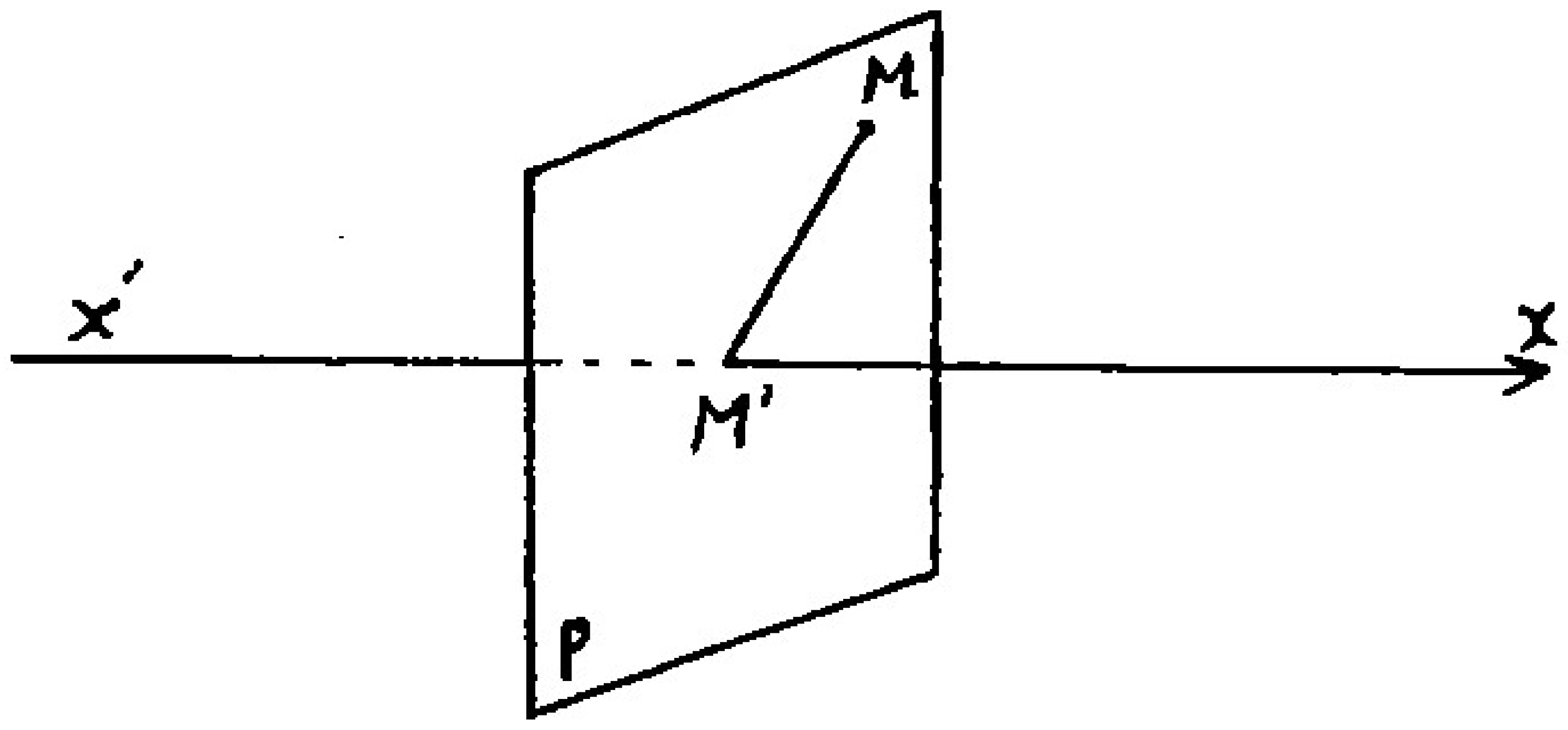
$$\vec{OS}=\vec{OA}_1+\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}$$

$$\vec{OS}=\vec{OA}_3=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3$$

واذا كانت S منطبقة على O عندئذ يكون المجموع الشعاعي مساويا لشعاع الصفر $\vec{0}$ والمنحني اليساري $OS_1S_2S_3S$ يكون منحنيامغلقا .

0.5 ـ الاسقاط القائم على محور :

المسقط القائم للنقطة M على المحور x'x هي نقطة M' اثر المستوي (P) على المحور x'x المار من النقطة M معامدا المحور. المستوي(P) يدعى المستوي المسقط للنقطة M شكل(0.7).

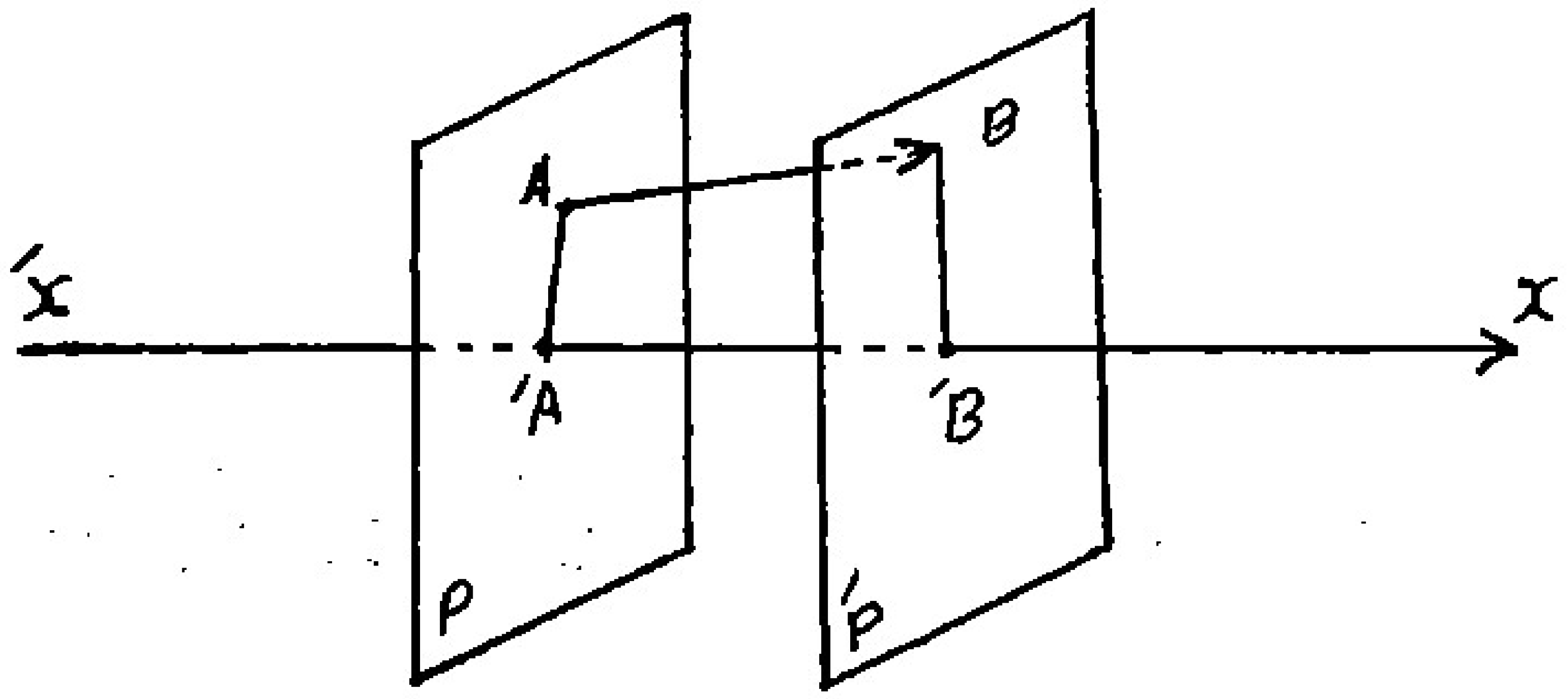


الشكل (0.7)

وبنفس الطريقة يمكننا ايجاد المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{AB}$ على محور موجه x'x بايجاد المسقط القائم لنقطتي مبدأ الشعاع ونهايته فنحصل على القطعة الجبرية $\overline{A'B'}$ التي هي القياس الجبري للشعاع $\overrightarrow{A'B'}$ الذي مبدأوه A' مسقط A ونهايته B' مسقط B .

ويمكن أن نقول : ان المسقط القائم لشعاع معلوم على محور موجه هو قطعة جبرية فنكتب :

$$\overline{A'B'} = Proj.\overrightarrow{AB}$$



الشكل (0.8)

نتيجة (١) :

اذا اسقطنا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ على محور موازٍ للمحور x'x وبنفس الاتجاه نحصل على $\overline{A''B''}$ الذي يساوي المسقط $\overline{A'B'}$ فنكتب :

$$\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$$

وهذا التساوي يتحقق عندما يكون شعاعا الواحدة للمحورين متساويين .

نتيجة (٢) :

نسبة مسقطي شعاعين متوازيين على محور تساوي نسبة هذين الشعاعين. أي اذا كان $\overrightarrow{AB}$ موازيا الى $\overrightarrow{CD}$ يمكننا أن نكتب :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$$

وبحالة خاصة اذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ عندئذ $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$ ولذلك يمكن القول : ان مسقطي شعاعين متساويين على محورهما عددان متساويان

اما اذا كان $\overrightarrow{CD}$ هو شعاع الواحدة فان النسبة $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{U}}$ هي القياس الجبري للشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالنسبة للمحور yy' الذي يقبل الشعاع $\overrightarrow{U}$ شعاعا للواحدة. فنكتب :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{U}} = \overline{AB} = K$$

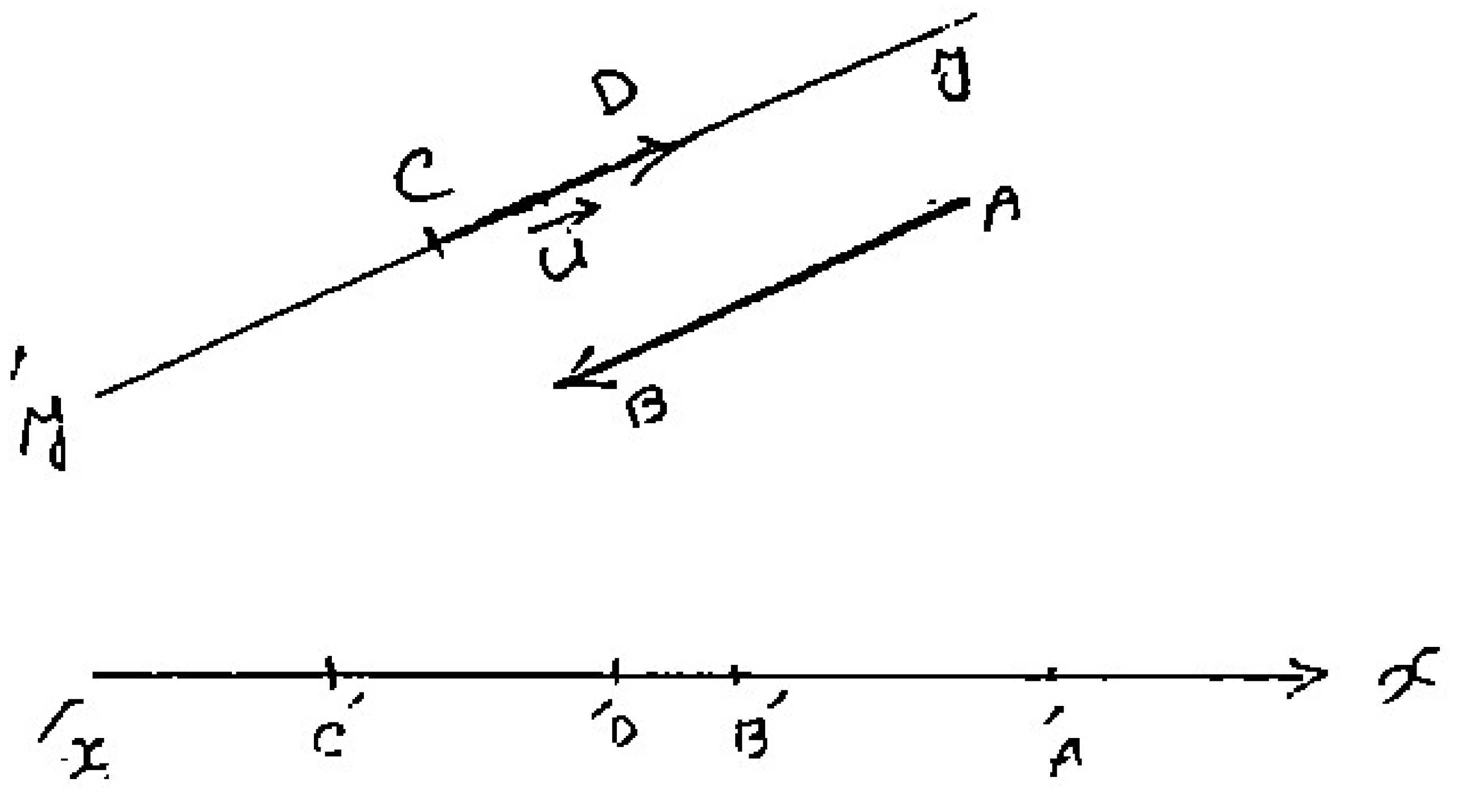
ويمكننا أن نكتب أيضا :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = K$$

ومنه : $\overline{A'B'} = k \times \overline{C'D'} = KP$

حيث : $P = \overline{C'D'}$

كما في الشكل (0.9) :



الشكل (0.9)

نستنتج مما سبق : أن المسقط على محورx'x لشعاع محمول على المحور y'y يساوي الى جداء القياس الجبري لهذا الشعاع منسوبا الى المحور y'y بمسقط شعاع واحدة المحورy'y على المحورx'x .

فاذا كان :

$$\vec{V} = K.\vec{U}$$

نجد :

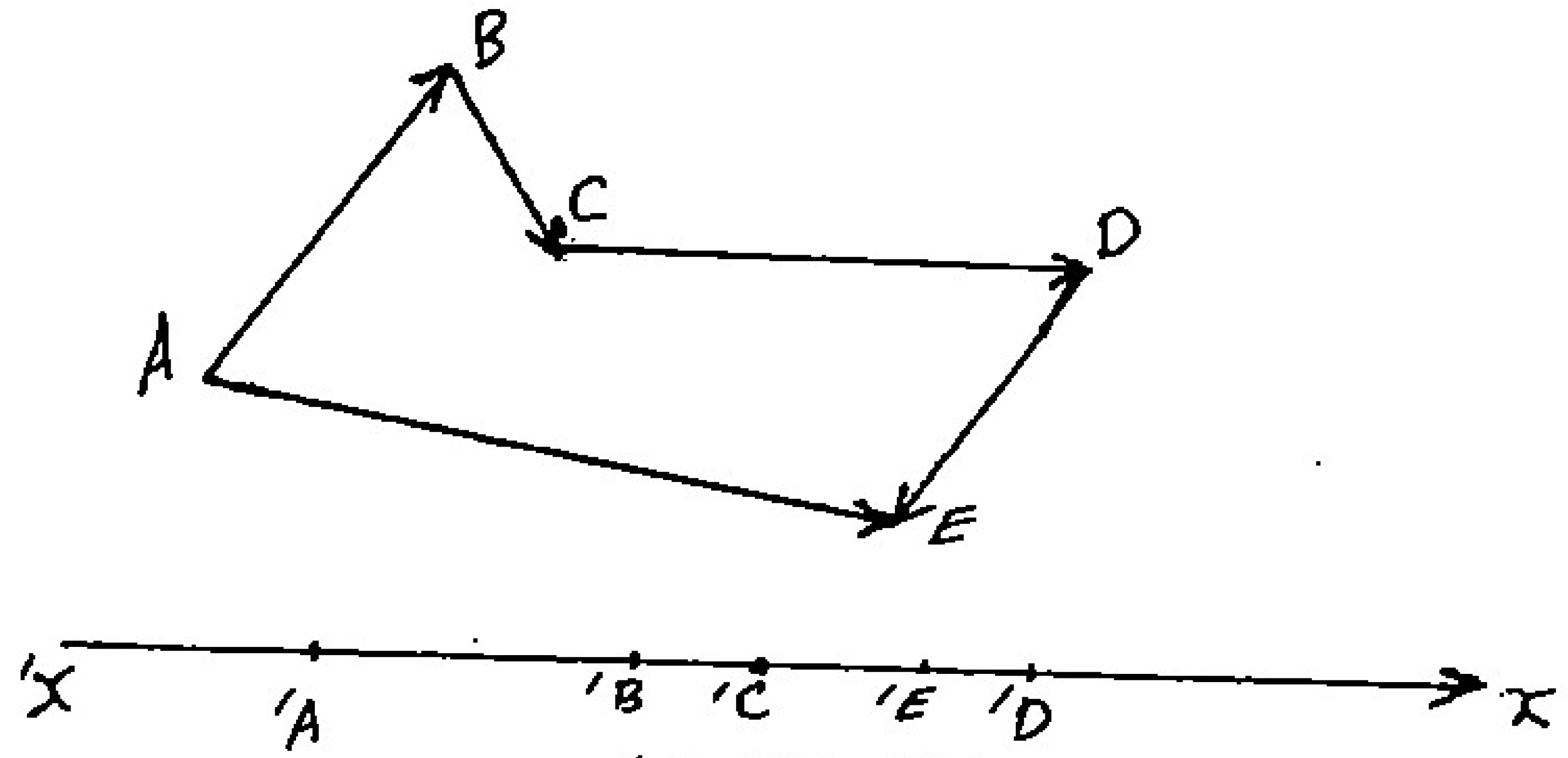
$$Proj\vec{V} = K \times Proj.\vec{U}$$

0.6-نظرية المساقط :

ليكن لدينا المجموع الشعاعي :

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$$

ولتكن A',B',C',D',E' المساقط القائمة للنقاط : A,B,C, E,D على المحور x'x كما في الشكل (0.10) .



الشكل (0.10)

لدينا :

$$\overline{A'B'} = Proj.\vec{AB}$$

$$\overline{B'C'} = Proj.\vec{BC}$$

$$\overline{C'D'} = Proj.\vec{CD}$$

$$\overline{D'E'} = Proj.\vec{DE}$$

$$\overline{A'E'} = Proj.\vec{AE}$$

اذا طبقنا علاقة شال على النقاط A',B',C',D',E' نجد:

$$\overline{A'E'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'}$$

ونعبر عن هذه النتيجة بالنظرية الاتية :

نظرية :

ان مسقط مجموع عدة أشعة على محور يساوي المجموع الجبري لمساقط هذه الاشعة على نفس المحور .

فاذا كانت لدينا العلاقة الشعاعية :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

واسقطنا هذه العلاقة على المحور x'x نجد :

$$Proj.\vec{V} = Proj.\vec{V}_1 + Proj.\vec{V}_2 + Proj.\vec{V}_3$$

0.7– جداء شعاع بعدد حقيقي :

تعريف :

بفرض $\vec{V}$ شعاع و λ عدد حقيقي (سلمي) فان جداء العدد الحقيقي λ بالشعاع $\vec{V}$ يعطى شعاعا جديدا $\vec{V'}$ فنكتب : $\vec{V'} = \lambda . \vec{V}$ فالشعاع $\vec{V'}$ يدعى بالمضاعف السلمي للشعاع $\vec{V}$ طوله $|\vec{V'}|$ معين بالعلاقة الاتية :

$$|\vec{V'}| = |\vec{V}| . |\lambda|$$

منحاه هو نفس منحى الشعاع $\vec{V}$، واتجاهه اتجاه $\vec{V}$ عندما $\lambda > 0$ وبالاتجاه المعاكس عندما $\lambda < 0$.

اعتمادا على هذا التعريف وتعريف جمع الاشعة يمكن برهان الخواص التالية :

اذا كان α, β عددين حقيقيين و $\vec{B}, \vec{A}$ شعاعان معلومان فان :

1) $\alpha(\beta \vec{A}) = (\alpha\beta)\vec{A}$

2) $(\alpha+\beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A}$

3) $\alpha(\vec{A}+\vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}$

واذا كان $\vec{U}$ شعاع الواحدة باتجاه الشعاع $\vec{A}$ فان :

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \Longrightarrow \vec{A} = |\vec{A}|\,\vec{U}$$

0.8– تعيين شعاع بطريقة تحليلية :

بفرض أن x'ox, y'oy محوران متعامدان متقاطعان في النقطة o وليكن $\vec{OI} = \vec{i}$ شعاع الواحدة الذي يعين الاتجاه الموجب لمحور السينات و $\vec{OJ} = \vec{j}$ شعاع الواحدة الذي يعين الاتجاه الموجب لمحور العينات فاذا كان $|\vec{OI}| = |\vec{OJ}| = 1$ سميت جملة المحاور الاحداثية جملة نظامية (وهذا ليس ضروريا في الحالة العامة) . فاذا رسمنا الشعاع $\vec{OM}$ ممثلا للشعاع الطليق $\vec{V}$ في المستوي وأسقطنا الشعاع $\vec{OM}$ عموديا على المحورين الاحداثيين ، نجد $x = \overline{oA}$, $y = \overline{oB}$ فالعددان الجبريان y,x هما المسقطان القائمان للشعاع $\vec{OM}$ على المحورين الاحداثيين وهما بنفس الوقت احداثيا النقطة M فنكتب M (x,y)

ومن الشكل نجد :

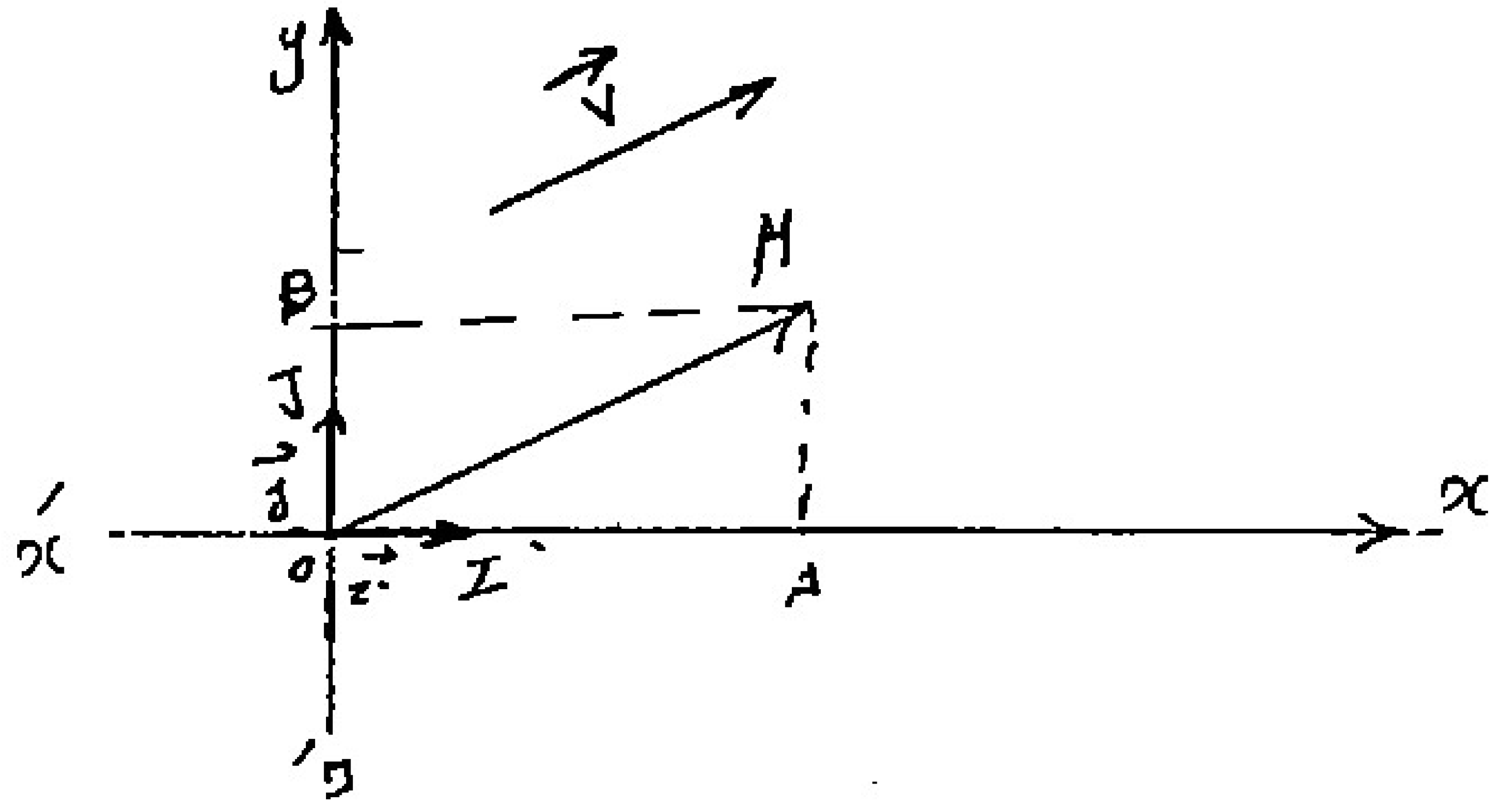
$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

حيث

$$\vec{OA} = x\vec{i}$$

$$\vec{OB} = y\vec{j}$$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



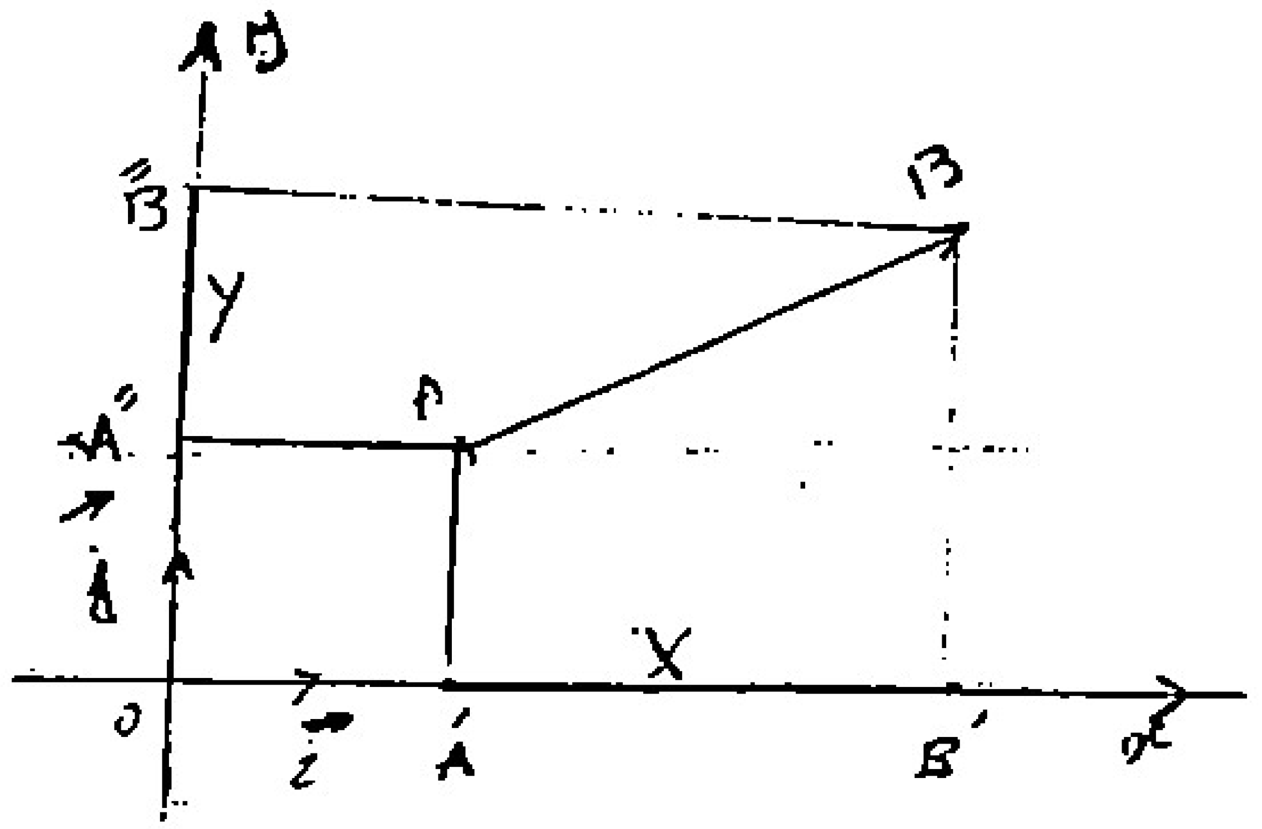
الشكل (0.11)

$\vec{yj}, \vec{xi}$ هما المركبتان الشعاعيتان للشعاع $\vec{OM}$ ، بينما x و y تدعيان بالمركبتين الجبريتين للشعاع $\vec{OM}$ أو بالمسقطين . ونكتب اختصارا $\vec{OM}(x,y)$ ونعني بذلك ان $\vec{OM}$ شعاع مركبتاه الجبريتان هما x , y .

اما اذا كان الشعاع $\vec{V}=\vec{AB}$ مقيدا علم منه المبدأ $A(x_1,y_1)$ والنهاية $B(x_2,y_2)$ فيمكن أن نجد بسهولة مسقطي الشعاع على المحورين الاحداثيين :

$$\overline{A'B'} = X = proj\ \vec{AB} = x_2 - x_1$$

$$\overline{A''B''} = Y = proj\ \vec{AB} = y_2 - y_1$$



الشكل (0.12)

فيمكننا ان نعبر عن الشعاع $\vec{AB}$ بدلالة مسقطية بالشكل :

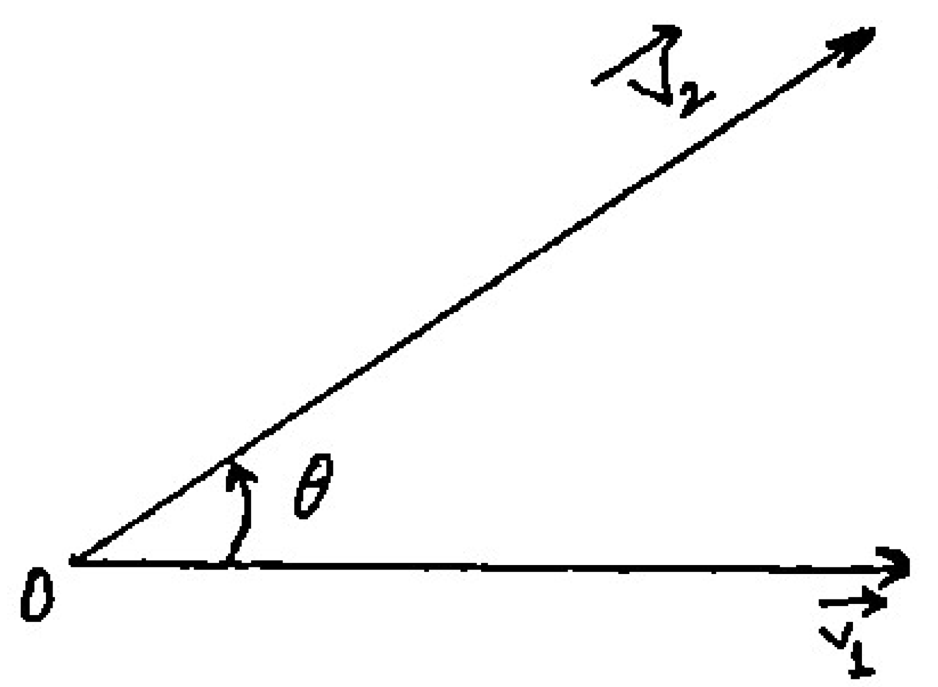
$$\vec{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\ \vec{i} + (y_2 - y_1)\ \vec{j}$$

0.9 – الجداء السلمي لشعاعين : Scalar Product

ليكن $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ شعاعين مستويين ، الزاوية بينهما θ ، نعرف الجداء السلمي لهذين الشعاعين بأنه مقدار سلمي يساوي الى جداء طول الاول في طول الثاني في جيب تمام الزاوية الكائنة بينهما فنكتب :

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = |\vec{V_1}| \cdot |\vec{V_2}| \cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$



الشكـل (0.13)

ويسمى الجداء السلمي أيضا بالجداء الداخلي وواضح أن الجداء الداخلي هو تبديلي ، والناتج هو عدد موجب عندما θ حادة وسالب عندما θ منفرجة ،ويساوي الصفر عندما $\theta = \pi/2$.

وعندما يتساوى الشعاعان يكون :

$$\vec{V}.\vec{V} = |\vec{V}|\cdot|\vec{V}| = |\vec{V}|^2$$

وفي حالة اشعة الواحدة $\vec{j},\vec{i}$ فان $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = 1$
و $\vec{i}.\vec{j} = 0$.

ويمكن أن نبرهن بسهولة على الخواص الآتية :

١- من اجل α عدد حقيقي و $\vec{A}$, $\vec{B}$ شعاعان ما لدينا :

$$(\alpha \vec{A})\vec{B} = \alpha(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{A}(\alpha \vec{B})$$

٢- الجداء الداخلي توزيعي : فمن أجل ثلاثة اشعة مفروضة $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ فان :

$$(\vec{A}+\vec{B})\vec{C} = \vec{A}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{C}$$

$$\vec{A}(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} .$$

0.10 ـ الجداء الداخلي لشعاعين بدلالة مسقطيهما على المحورين الاحداثيين :

ليكن :

$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

$$\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$$

فان :

$$\vec{A}.\vec{B} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j})$$

$$\vec{A}.\vec{B} = a_1 a_2 + b_1 b_2 \qquad (1)$$

تطبيق :

احسب الزاوية الكائنة بين الشعاعين :

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{B} = \vec{i} - \vec{j}$$

من تعريف الجداء السلمي

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}| \cos\theta$$

$$\vec{A}.\vec{B} = \sqrt{4+9} \,.\, \sqrt{1+1} \cos\theta$$

$$\vec{A}.\vec{B} = \sqrt{26} \,.\, \cos\theta$$

ومن جهة ثانية فحسب العلاقة (1) للجداء الداخلي نجد :

$$\vec{A}.\vec{B} = 2.1 + 3(-1) = 2-3 = -1$$

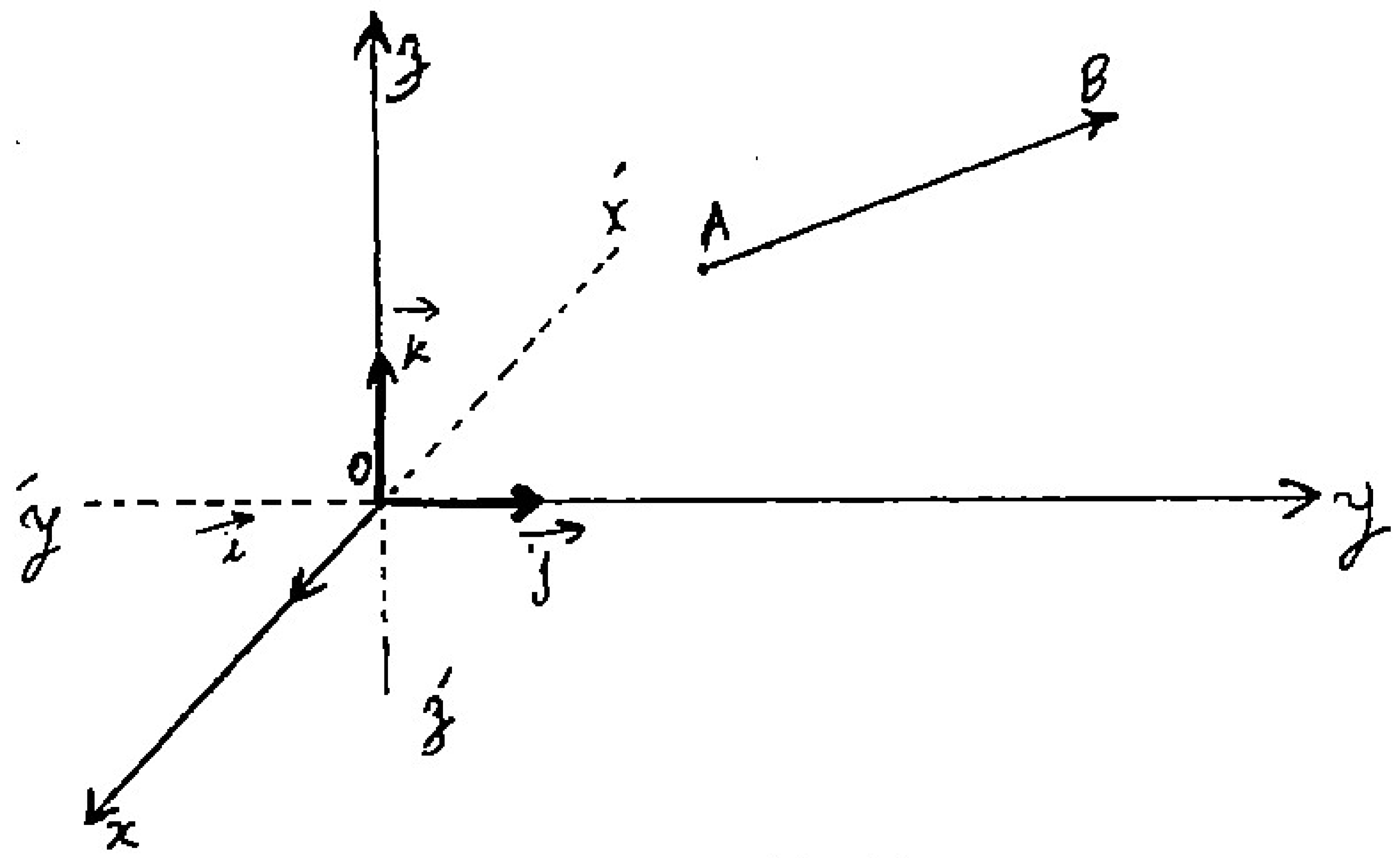
$$-1 = \sqrt{26} \cos\theta$$

ومنه :

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{26}}$$

وتحسب قيمة واحدة لـ θ في المجال $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

أما في الفراغ ثلاثي البعد المعين بجملة المحاور الاحداثية المتعامدة مثنى مثنى $x'ox, y'oy, z'oz$ وحيث $\vec{i}$ شعاع الواحدة الذي يحدد الاتجاه الموجب لمحور السينات و $\vec{j}$ شعاع الواحدة الذي يحدد الاتجاه الموجب لمحور العينات و $\vec{K}$ شعاع الواحدة الذي يحدد الاتجاه الموجب لمحور الصادات كما في الشكل (0.14) :



الشكل (0.14)

فان الشعاع $\vec{AB}$ يملك ثلاثة مساقط على المحاور الاحداثية هي

$$X = \overline{A'B'} = \text{Proj } \vec{AB}$$

$$Y = \overline{A''B''} = \text{Proj} . \vec{AB}$$

$$Z = \overline{A'''B'''} = \text{proj} . \vec{AB}$$

وعندئذ نعبر عن الشعاع $\vec{AB}$ بدلالة مساقطه بالشكل :

$$\vec{AB} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{K}$$

واذا كان الشعاع $\vec{AB}$ مقيدا اي علم مبدوءه $A(x_1, y_1, z_1)$ ونهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ فان :

$$Z = z_2 - z_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad X = x_2 - x_1$$

ولايجاد الجداء السلمي للشعاعين :

$$\vec{A} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$$

$$\vec{B} = b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k}$$

نستفيد من الحقائق التالية :

$$\vec{i} . \vec{i} = \vec{j} . \vec{j} = \vec{k} . \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} . \vec{j} = \vec{j} . \vec{i} = \vec{j} . \vec{k} = \vec{k} . \vec{j} = \vec{k} . \vec{i} = \vec{i} . \vec{k} = 0$$

ومن الخواص الوارده في (0.9) والتي اعتبرناها أساسا لتعميم مفهوم الجداء السلمي على الفراغ الثلاثي لحساب الجداء السلمي للشعاعين :

$$(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) . (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = \vec{A}.\vec{B}$$

لنجد :

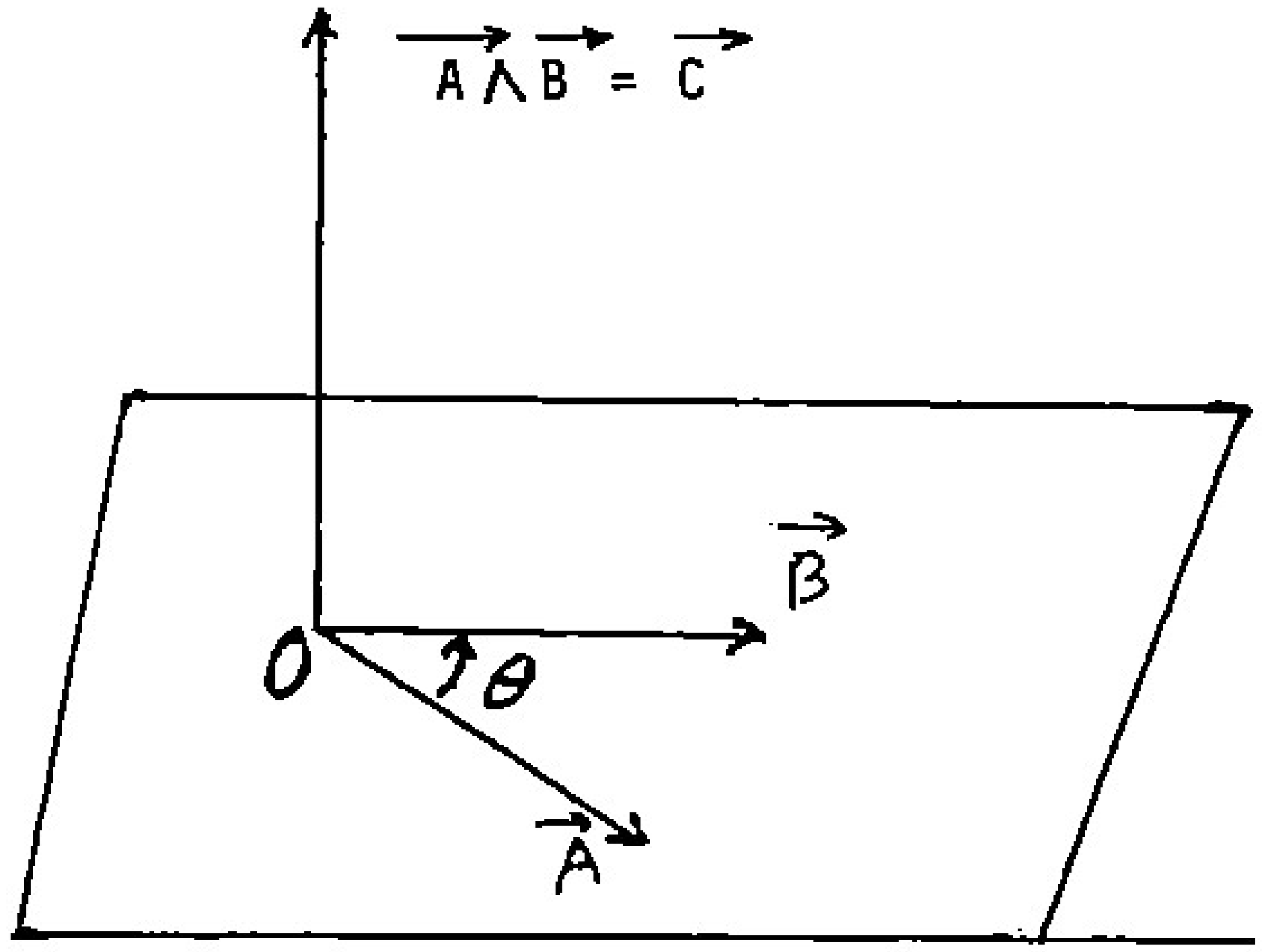
$$\vec{A} . \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

وواضح ان هذا الجداء يساوي الصفر في حالة تعامد الشعاعين $\vec{A}$, $\vec{B}$.

0.11 ـ الجداء الخارجي لشعاعين (او الجداء الشعاعي):

Vector Product

نعرف الجداء الخارجي لشعاعين $\vec{A},\vec{B}$ بأنه شعاع ثالث $\vec{C}$ يعامد مستوي الشعاعين $\vec{A},\vec{B}$ واتجاهه بحيث تؤلف الاشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ ثلاثية طردية ، بمعنى أنه لو وقف راصد باتجاه $\vec{C}$ ونظر الى الشعاع $\vec{A}$ لوجد الشعاع $\vec{B}$ الى يساره كما في الشكل . ونعبر عن الجداء الخارجي للشعاعين $\vec{A},\vec{B}$ بالشكل التالي :



$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{C}$

الشكل (0.15)

أما طويلة $\vec{C}$ أو $|\vec{A}\wedge\vec{B}|$ فتساوي الى العدد الدال على مساحة متوازي الاضلاع الذي ضلعاه $\vec{A}$, $\vec{B}$:

أي :

$$|\vec{A}\wedge\vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta$$

واذا اعتبرنا $\vec{N}$ شعاع الواحدة المحمول على $\vec{C}$ بالاتجاه الموجب نكتب :

$$|\vec{A}\wedge\vec{B}| = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta \cdot \vec{N}$$

حيث :

$$0 \leqslant \theta < \pi$$

ونستنتج من التعريف السابق ان الجداء الخارجي لشعاعين هو شعاع ثالث ، كما أن الجداء الخارجي للشعاعين غير تبديلي لان :

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{C}$$

$$\vec{B}\wedge\vec{A} = -\vec{C}$$

وبحالة خاصة اذا توازي الشعاعان $\vec{A}, \vec{B}$ فان $\sin\theta = 0$ وبالتالي $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{0}$ وكذلك $\vec{A}\wedge\vec{A} = \vec{0}$ مهما كان الشعاع $\vec{A}$.

أما من اجل اشعة الواحدة المحمولة على المحاور الاحداثية لدينا :

$$\vec{i}\wedge\vec{i} = \vec{j}\wedge\vec{j} = \vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i}\wedge\vec{j} = -\vec{j}\wedge\vec{i} = \vec{k}$$

$$\vec{j}\wedge\vec{k} = -\vec{k}\wedge\vec{j} = \vec{i}$$

$$\vec{k}\wedge\vec{i} = -\vec{i}\wedge\vec{k} = \vec{j}$$

ويمكن اثبات (في بحث التحليل الشعاعي) أن الجداء الخارجي لشعاعين هو توزيعي بالنسبة للجمع أي ان :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\vec{C}$$

0.12 ـ حساب الجداء الخارجي لشعاعين بدلالة مساقط كل منهما على المحاور الاحداثية :

بفرض :

$$\vec{A} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{B} = x_2\vec{i} = y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

فان :

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \wedge (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

ونلاحظ أن الجداء السابق ليس الا منشور المعين الآتي :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{A}\wedge\vec{B}$$

تطبيق : أوجد الجداء الخارجي للشعاعين الاتيين :

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

الحل :

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

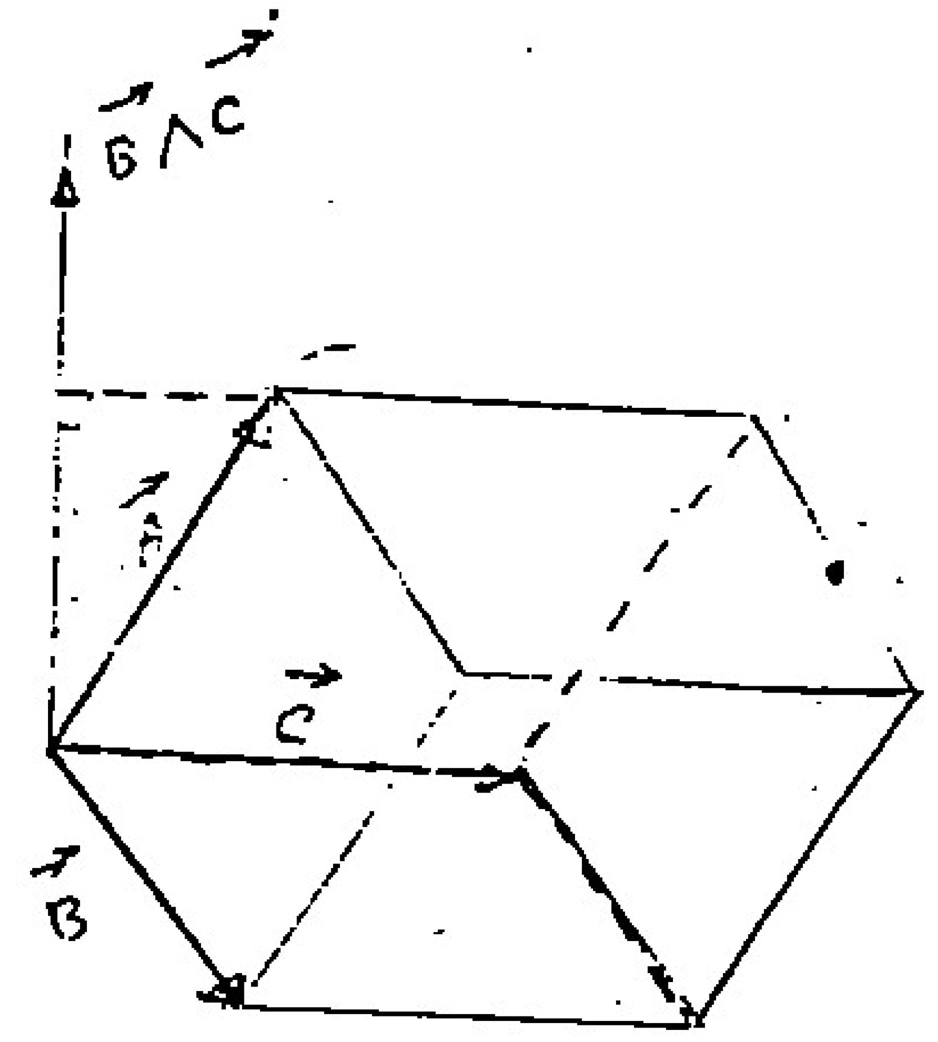
$$= 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

ويمكن أن نرى بسهولة ان هذا الشعاع يعامد كلا من الشعاعين $\vec{A}$, $\vec{B}$.

0.13 ـ الجداء المختلط لثلاث أشعة :

The Scalar Triple Product

وجدنا في الفقرة السابقة ان الجداء الخارجي لشعاعين هو شعاع مثل $\vec{B}\wedge\vec{C}$ فاذا ضربنا هذا الشعاع سلميا بشعاع ثالث مثل $\vec{A}$ نحصل على مقدار سلمي هو $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$ فهذا الجداء يسمى بالجداء المختلط/وللجداء المختلط معنى هندسي يدل على أن القيمة المطلقة لهذا الجداء تساوي الى العدد الدال على حجم متوازي السطوح الماثل الذي حروفه هي الاشعة $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$.



الشكل (0.16)

وجدنا أن $\vec{B}\wedge\vec{C}$ هو شعاع يعامد مستوي هذين الشعاعين وان طــول هذا الشعاع يساوي العدد الدال على مساحة متوازي اضلاع القاعدة ،أما الجداء السلمي $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$ فهو مقدار سلمي يساوي الى جداء مسقط $\vec{A}$ على الشعاع $(\vec{B}\wedge\vec{C})$ (وهو ارتفاع متوازي السطوح) في مساحة متوازي الاضلاع المذكور أي : $|\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})|$ = العدد الدال على حجم متوازي السطوح الذي حروفه الاشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$.

وعندما تقع الاشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ في مستو واحد فان الجــداء المختلط لها يساوي الصفر أي $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = 0$

ويمكن أن نصل الى النتيجة التالية : يكون الجداء المختلط لثلاث اشعة معدوما اذا وفقط اذا كانت هذه الاشعة تقع في مستــو واحد .

وكذلك يمكن التعبير من الجداء المختلط لثلاثة أشعة معلومة بواسطة المعينات ،فاذا كانت $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$ ثلاثة اشعة معينة بمساقطها على المحاور الاحداثية ،فان الجداء المختلط لها

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot[(b_2c_3-b_3c_2)\vec{i}+$$

$$(b_3c_1-b_1c_3)\vec{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\vec{k}\,] =$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

ونلاحظ أن هذه النتيجة ليست الا منشور المعين الآتي :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})$$

من المعلوم في الجبر الخطي أن الشرط اللازم والكافي كي تكــون ثلاثة أشعة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ مرتبطة خطيا هو أن يكون جداؤها المختلــط مساويا للصفر أي أن تكون القيمة العددية لمنشور المعين السابــق تساوي الصفر .

ويمكن بالاستناد الى مفهوم الجداء المختلط لثلاثة أشعــة الاستفادة لاثبات وقــوع أربع نقاط في مستو واحد .فاذا كان لدينا النقاط $A_4(x_4,y_4,z_4)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_1(x_1,y_1,z_1)$ من الفراغ الثلاثي

عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كي تكون هذه النقاط في مستو واحد
هو ان يكون الشعاع المقيد $\overrightarrow{A_1A_2}$ مثلا واقعا في مستوي الشعاعين المقيدين
$\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ ولما كانت هذه الاشعة هي :

$$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1), \ \overrightarrow{A_1A_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$$

$$\overrightarrow{A_1A_4}(x_4-x_1, y_4, y_1, z_4-z_1)$$

عندئذ نقول : ان الشرط اللازم والكافي كي تقع النقاط الاربعة
في مستو واحد هو :

$$(\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}).\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال : برهن أن النقاط الاربع :

A(1,6,5) , B(7,-18,2),C(3,-2,4), D(4,4,9)

تقع في مستو واحد :

الحل : لنوجد الجداء المختلط

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) . \overrightarrow{AD}$$

بنشر المعين التالي :

$$\begin{vmatrix} 7-1 & -18-6 & 2-5 \\ 3-1 & -2-6 & 4-5 \\ 4-1 & 4-6 & 9-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -24 & -3 \\ 2 & -8 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(-34) + 24(11) -3(20\ ) = 0$$

وبالتالي فالنقاط المعطاة تقع في مستو واحد .

الفصل الأول

الاحداثيات والمناحي في الفراغ

(1.1) ـ الاحداثيات الديكارتية :

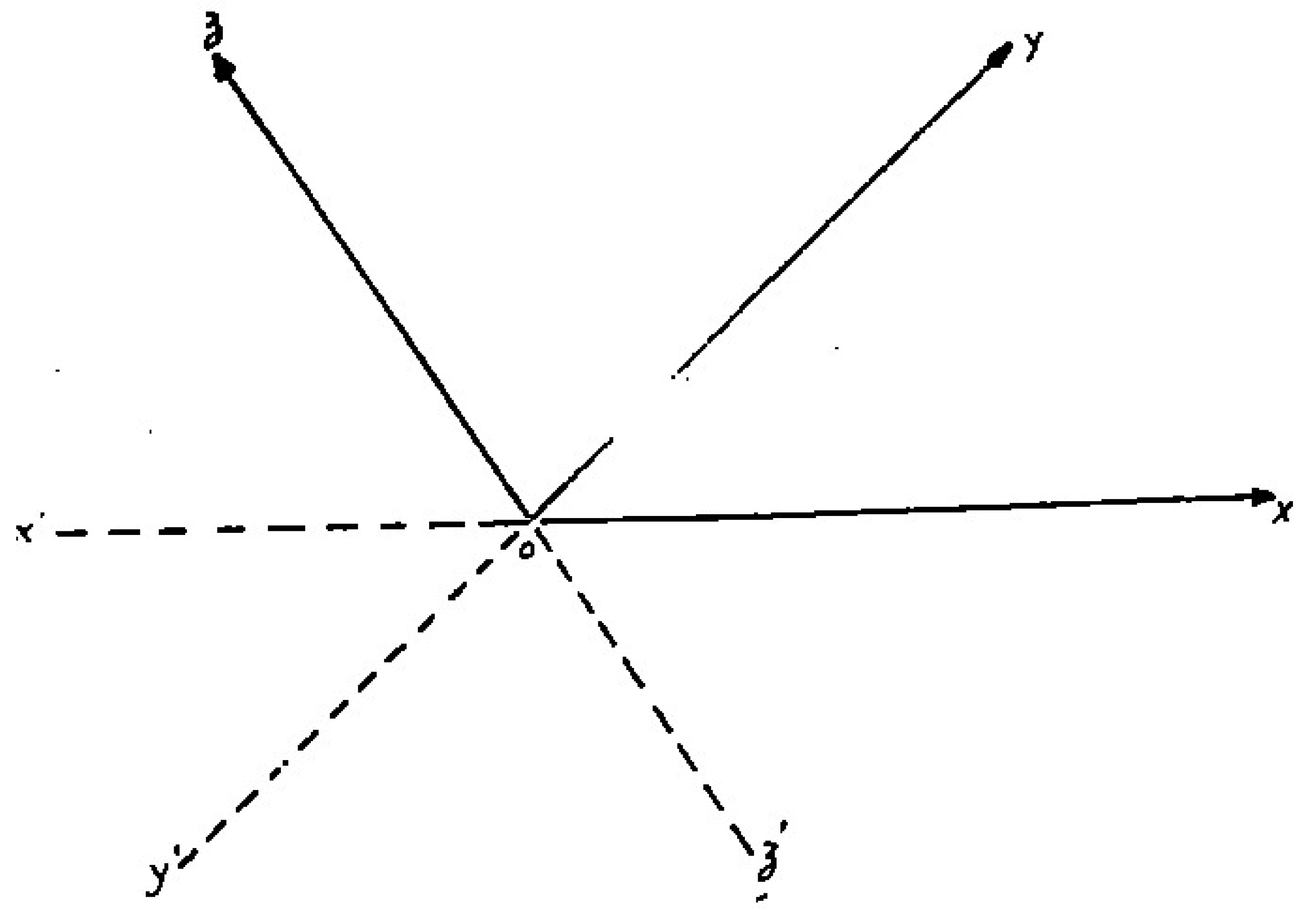
بفرض $x'ox$, $y'oy$, $z'oz$ ثلاثة محاور متلاقية في النقطة o وغير واقعة في مستو واحد ،فهذه المحاور تدعى بالمحاور الاحداثية وتعين ثلاثة مستويات مختلفة تدعى بالمستويات الاحداثية.

المحور $x'ox$ يسمى محور السينات (أو محور الفواصل) والمحور $y'oy$ يسمى محور العينات (أو محور التراتيب) والمحور $z'oz$ يسمى محور الصادات (او محور الرواقم) ، النقطة o تدعى مبدأ الاحداثيات (أو نقطة الاصل).

نسمي الفراغ الذي رسمنا فيه هذه المحاور فراغا احداثيا ثلاثي البعد . ونقول ان مجموعة المحاور السابقة تشكل جملة احداثية ديكارتية في هذا الفراغ ونرمز لها بالرمز $oxyz$.

وبصورة عامة ،لا تكون هذه المحاور متعامدة شكل(1) فنقول عنها أنها جملة محاور احداثية مائلة. اما اذا كانت هذه المحاور متعامدة مثنى مثنى عندئذ نقول : انها جملة محاور احداثية قائمة.

ونقول عن الجملة oxyz انها جملة احداثية مباشرة اذا دار المحور ox حول النقطة o في المستوي xoy لينطبق على المحور oy باتجاه يخالف دوران عقارب الساعة بالنسبة لراصد واقف وفق الاتجاه الموجب للمحور oz، واذا تم الدوران باتجاه دوران عقارب الساعة بالنسبة لهذا الراصد عندئذ نقول عن الجملة أنها جملة عكسية (أو غير مباشرة).



شكل (١)

(1.2) ـ تعيين نقطة في الفراغ:

لتكن M نقطة اختيارية من الفراغ المنسوب الى جملة المحاور الاحداثية oxyz، ولنرسم من هذه النقطة ثلاثة مستويات موازية للمستويات oyz,ozx,oxy تقطع المحاور x'ox,y'oy,z'oz في النقاط

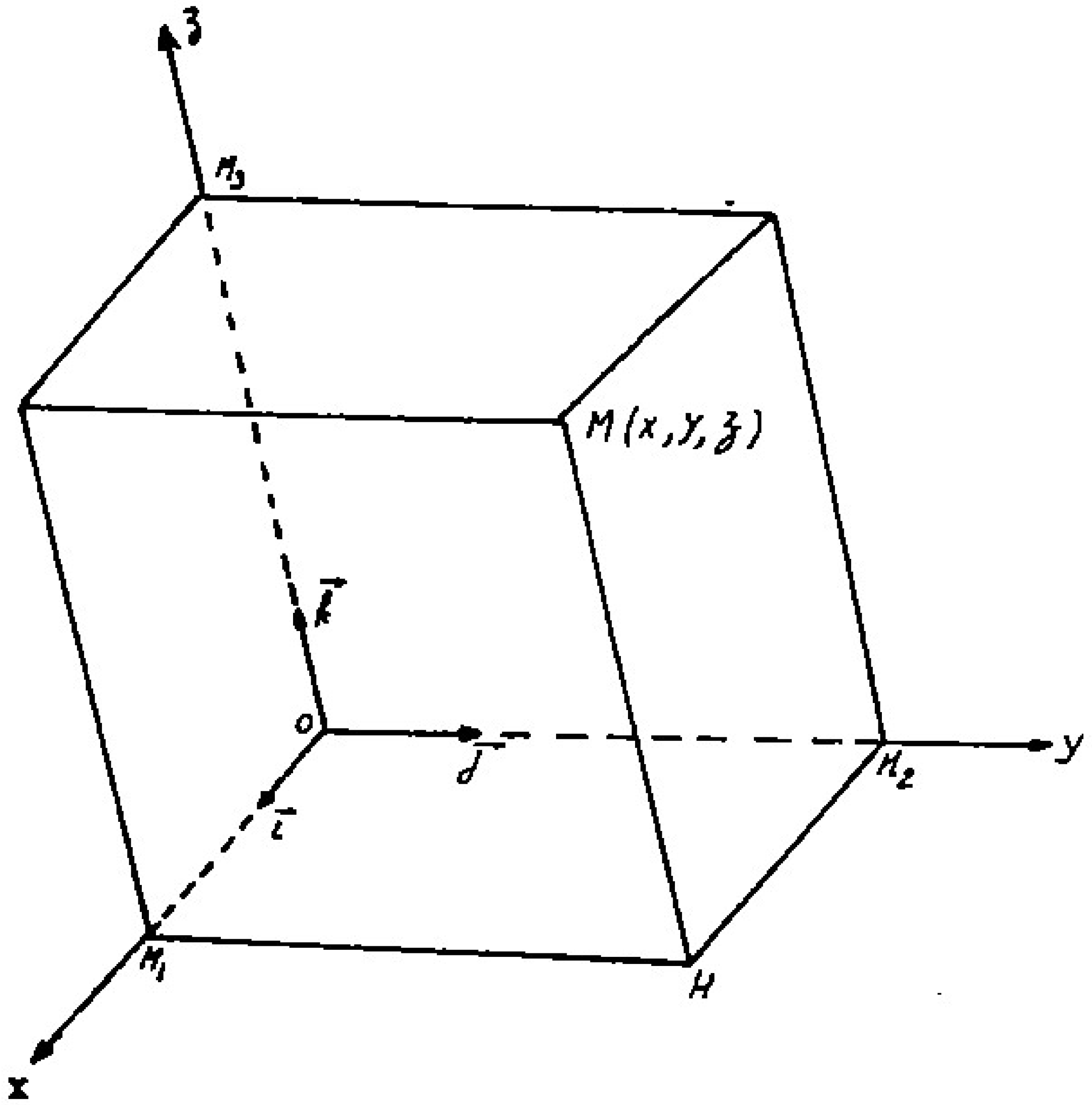
M_1, M_2, M_3 على الترتيب، هذه النقاط تدعى مساقط النقطة M بموازاة المستويات الاحداثية المذكورة. تتعين هذه المساقط على المحاور الاحداثية بفواصلها الجبرية على المحاور ولتكن x,y,z بحيث :

$$\overline{oM_1}= x,\quad \overline{oM_2}= y,\quad \overline{oM_3}= z$$

هذه الاعداد الجبرية الثلاثة تدعى احداثيات النقطة M ونسمي العدد y بفاصلة النقطة، والعدد z بترتيب النقطة والعدد x براقم النقطة. فكل نقطة من الفراغ الثلاثي يقابلها ثلاثي مرتب وحيد (x,y,z) من الاعداد الحقيقية. وبالعكس : ان كل ثلاثي مرتب (x,yz) من الاعداد الحقيقية يعين نقطة وحيدة من الفراغ .

فلو رسمنا من النقطة M_1 الواقعة على المحور ox والتي احداثيها x مستويا يوازي المستوي oyz، ورسمنا من النقطة M_2 الواقعة على المحور oy والتي احداثيها y مستويا يوازي المستوي ozx، ورسمنا من النقطة M_3 الواقعة على المحور oz احداثيها z مستويا يوازي المستوي oxy فان هذه المستويات تتقاطع حتما في نقطة وحيدة M تقابل الثلاثي المرتب (x,y,z) . شكل (٢).

ونستنتج مما سبق بأنه يوجد تقابل بين مجموعة جميع الثلاثيات المرتبة من الاعداد الحقيقية، أي بين المجموعة الديكارتية R^3 ومجموعة جميع نقاط الفراغ ثلاثي البعد . ويمكن أن نقول : ان هذا الفراغ هو صورة هندسية للمجموعة R^3 . (وبصورة مماثلة يمكن أن نقول ان الفراغ ثنائي البعد هو صورة هندسية للمجموعة R^2، والفراغ آحادي البعد هو صورة هندسية للمجموعة R)، والرمز M(x,y,z)



شكل (٢)

يدل على ان (x,y,z) هي احداثيات النقطة M ،وتسمى النقطة M بيان الثلاثي المرتب (x,y,z) من الاعداد الحقيقية .

اذا كانت $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ اشعة الواحدة محمولة على المحاور oz، oy ، ox، على الترتيب فان الشعاع $\vec{oM}$ يعبر عنه بالعلاقة الشعاعية :

$$\vec{oM} = \vec{oM_1} + \vec{oM_2} + \vec{oM_3}$$

أو :

$$\vec{oM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1.2.1)$$

وهذا واضح من متوازي السطوح في الشكل(٢) ،فالاحداثيات الديكارتية x,y,z للنقطة M هي مركبات الشعاع $\vec{oM}$ وفق أشعة

الواحدة للمحاور الاحداثية .

وكثيرا ما نكتب $\vec{M}$ بدلا من النقطة M ونعني بذلك نهاية الشعاع $\vec{oM}$ الذي مركباته احداثيات هذه النقطة ،واستنادا لهذا الاصطلاح يمكن أن نعبر عن الشعاع AB في الفراغ بالشكل التالي :

$$\vec{AB} = \vec{oB} - \vec{oA} = \vec{B} - \vec{A} \qquad (1.2.2)$$

أما اذا كانت جملة المحاور الاحداثية متعامدة مثنى مثنى عندئذ تدعو النقاط M_1 , M_2, M_3 بالمساقط القائمة للنقطة M على هذه المحاور وتدعو جملة المحاور الاحداثية بالجملة الاحداثية القائمة. وسوف نعتمد في هذا الكتاب جملة المحاور الاحداثية القائمة ما لم ننص على خلاف ذلك .

(1.3) ـ البعد بين نقطتين في الفراغ :

من المعلوم في بحث الاشعة ان الجداء السلمي لشعاع في نفسه يساوي مربع طول هذا الشعاع ،فاذا كانت X ,Y, Z مركبات هذا الشعاع بالنسبة لجملة احداثية قائمة عندئذ نكتب :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

وبالتالي فان طول هذا الشعاع هو :

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (1.3.1)$$

ولحساب البعد بين النقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ في الفراغ المنسوب الى جملة محاور احداثية قائمة يكفي حساب طول

الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ ، فاذا رمزنا للبعد بين هاتين النقطتين بالرمز d يكون:

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (1.3.2)$$

حيث :

$$X = x_2 - x_1 \quad , \quad Y = y_2 - y_1 \quad , \quad Z = z_2 - z_1$$

هي مركبات الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ على المحاور الاحداثية :

أما في جملة محاور احداثية مائلة شكل(٣) يكون لدينا :

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \cos\theta_1 \ , \ \vec{j}\cdot\vec{k} = \cos\theta_2 \ , \ \vec{k}\cdot\vec{i} = \cos\theta_3$$

حيث :

$$\theta_1 = (\widehat{0x , 0y}) \ , \ \theta_2 = (\widehat{0y , 0z}) \ , \ \theta_3 = (\widehat{0z , 0x})$$

والعلاقة (1.3.1) تصبح :

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2+2XY\cos\theta_1+2YZ\cos\theta_2+2XZ\cos\theta_3} \qquad (1.3.3)$$

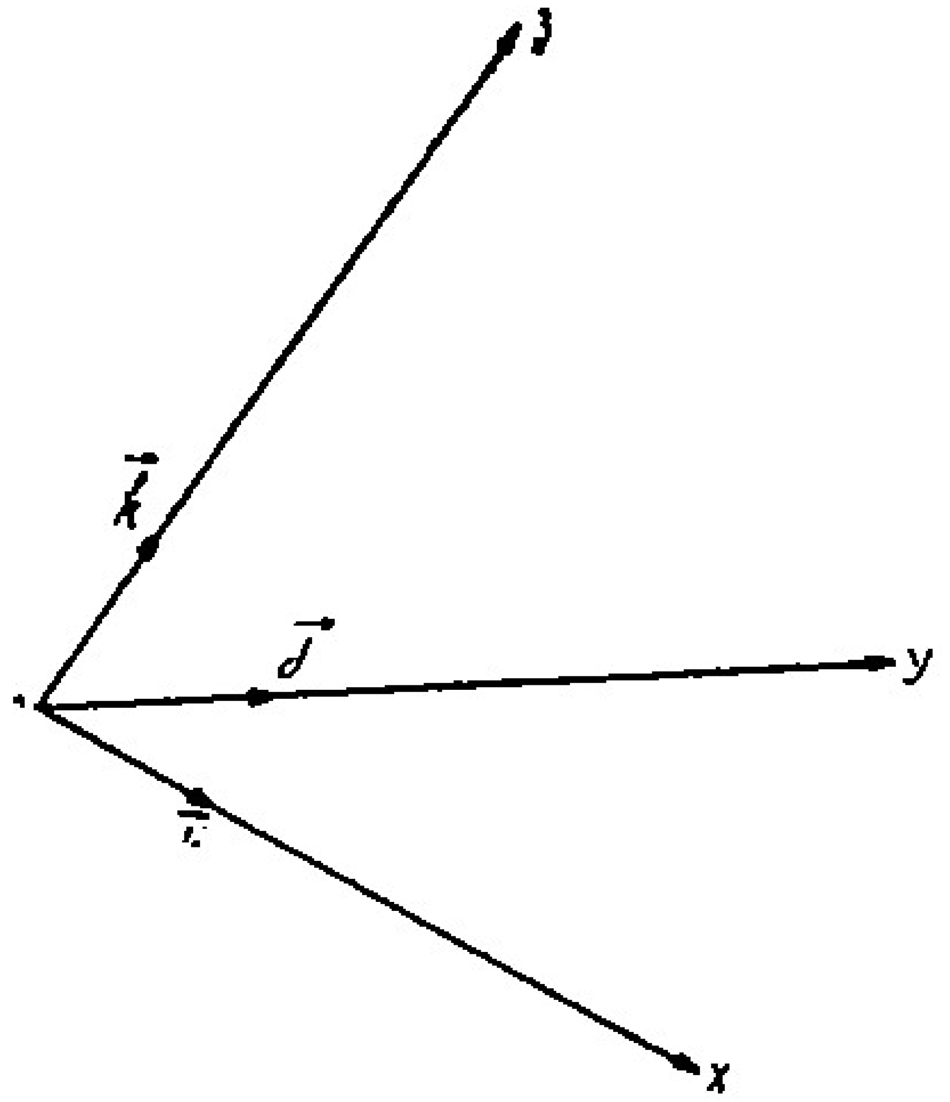
مثال :

احسب البعد بين النقطتين A(1 , 3 , 2) , B (-1, 3, 5)

بتطبيق الدستور (1.3.2) نجد :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2+(3-3)^2+(5-2)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$$



شكل (٣)

(1.4) ـ احداثيات نقطة تقسم قطعة مستقيمة بنسبة معلومة :

بفرض ان $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتان من فراغ ثلاثي منسوب الى جملة ما من المحاور الاحداثية (القائمة أو المائلة) ولتكن P (x,y,z) نقطة تقسم القطعة $\overline{M_1M_2}$ بالنسبة المعلومة r بحيث :

$$\frac{\overline{M_1P}}{\overline{PM_2}} = r$$

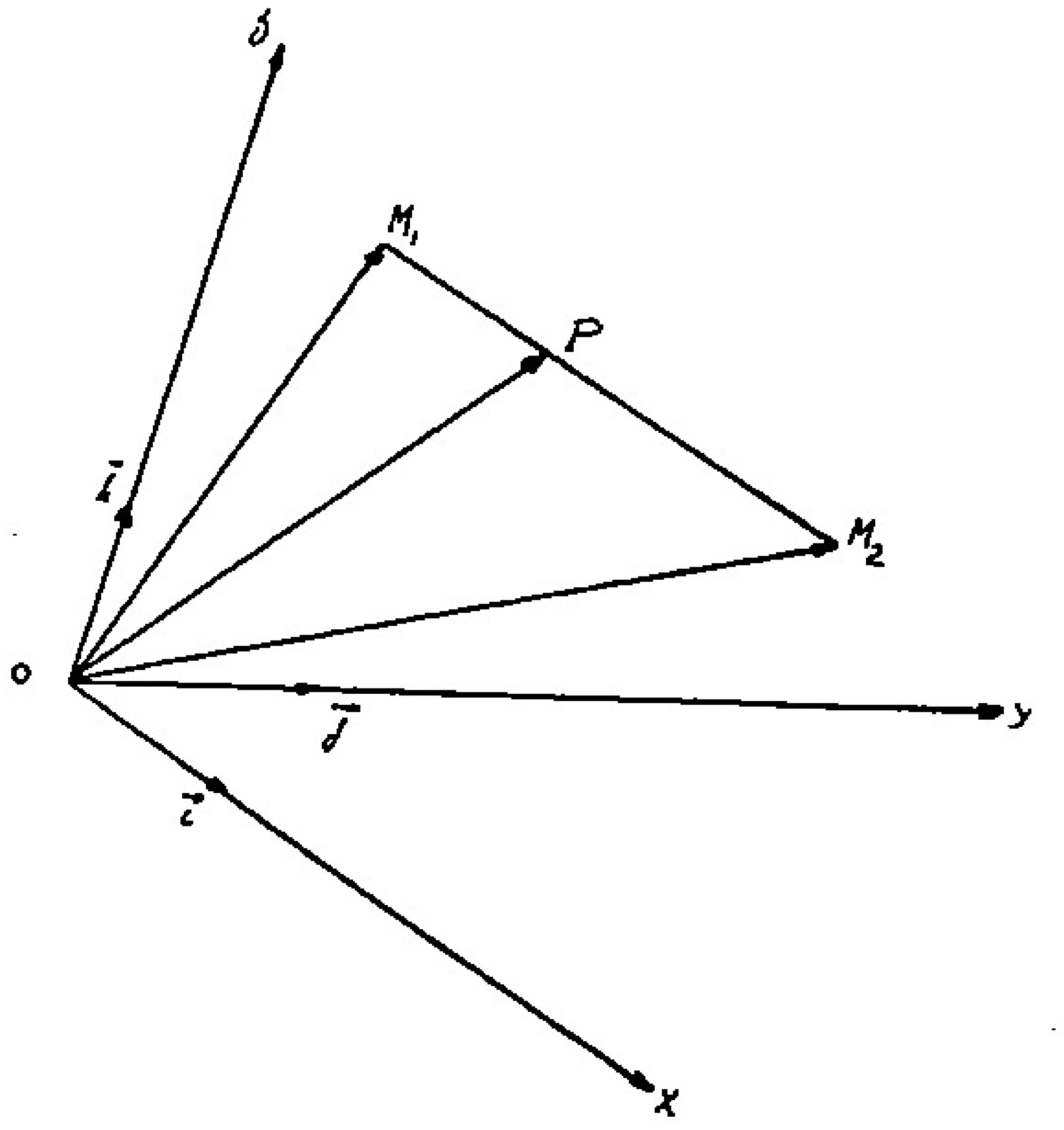
والمطلوب تعيين احداثيات النقطة P شكل(٤).

لنكتب العلاقة الشعاعية :

$$\overrightarrow{oP} = \overrightarrow{oM_1} + \overrightarrow{M_1P}$$

ومن الفرض لدينا :

$$\overrightarrow{M_1P} = r\overrightarrow{PM_2}$$



شكل (٤)

بالتعويض في العلاقة الشعاعية السابقة نجد :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + r(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OP})$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + r\,\overrightarrow{OM_2} - r\,\overrightarrow{OP}$$

$$(1 + r)\,\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + r\,\overrightarrow{OM_2}$$

ومنه :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + r\,\overrightarrow{OM_2}}{1 + r}$$

وباسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحاور الاحداثية نجد :

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} \;,\; y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r} \;,\; z = \frac{z_1 + r z_2}{1 + r}$$

وبحالة خاصة عندما تكون P في منتصف القطعة $\overline{M_1M_2}$ عندئذ $r = 1$ وعندئذ يكون :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \;,\; y = \frac{y_1 + y_2}{2} \;,\; z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

ملاحظة :

في الشكل السابق كانت النقطة P قاسمة داخلا للقطعة والنسبة r كانت موجبة، أما اذا كانت p قاسمة خارجا للقطعة فان النسبة r تكون سالبة بشرط $r \neq -1$.

(1.5) – الاحداثيات الاسطوانية :

وجدنا أن النقطة M في الفراغ تتعين بثلاثة مقادير حقيقية (سلمية) x, y, z تدعى بالاحداثيات الديكارتية لهذه النقطة.

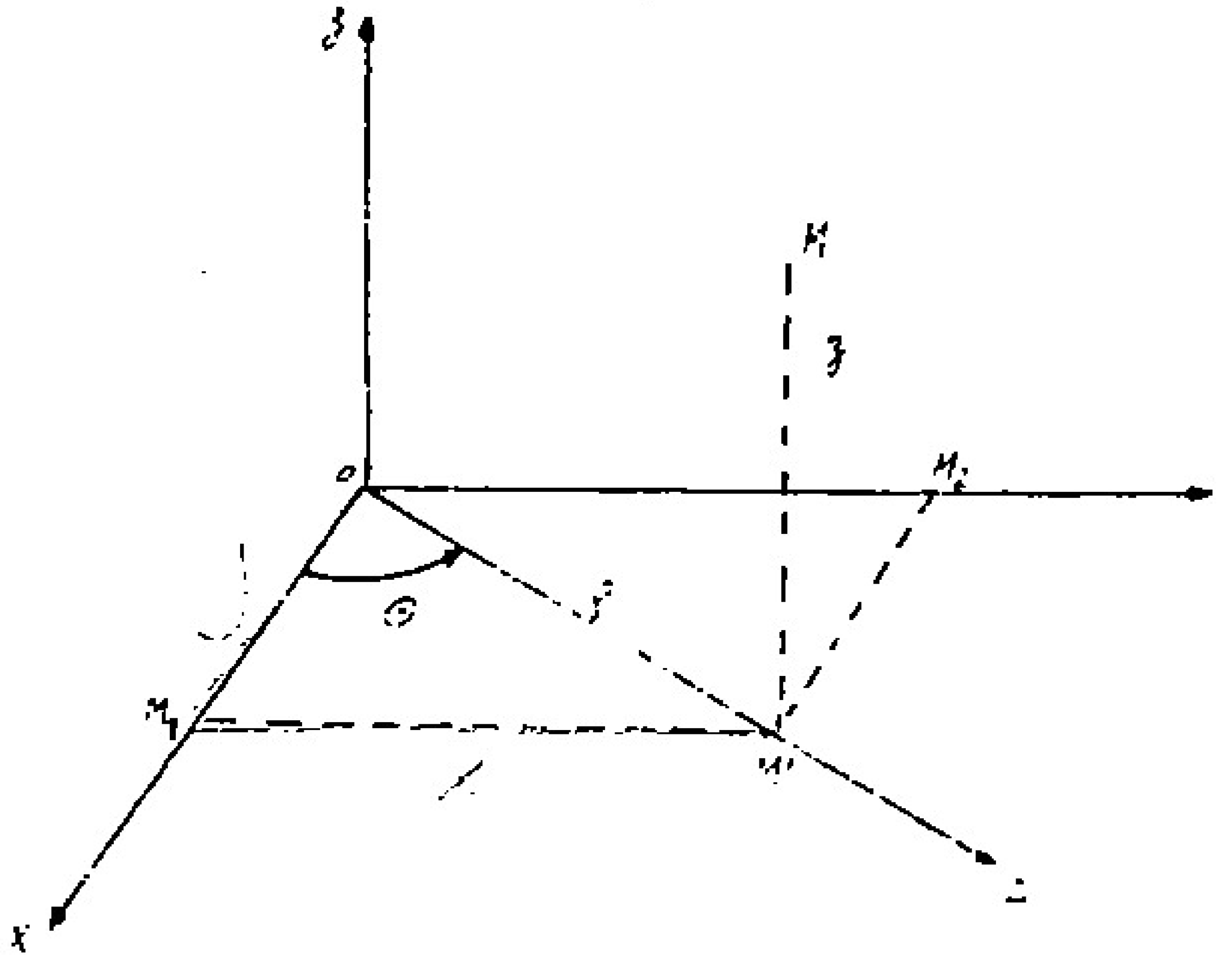
والان يمكن أن نرى بأنه يمكن تعيين النقطة M في الفراغ بطريقة أخرى تدعى بالطريقة الاسطوانية، وذلك بمعرفة راقمها $z = M'M$ ومسقطها M' على المستوي xoy، فاذا عيّنا المسقط M' في المستوي xOy بالاحداثيين القطبيين ρ, θ نقول عندئذ اننا قد عينا النقطة M في الفراغ بالطريقة الاسطوانية ، الشكل (٥).

ونسمي الاعداد الحقيقية ρ, θ, z بالاحداثيات الاسطوانية للنقطة ، ونرمز للنقطة M التي احداثياتها الاسطوانية ρ, θ, z

بالرمز $M\ (\rho,\theta,z)$. ونلاحظ أنه عندما تتحول θ في المجال $[0,2\pi[$ فان نصف المستوي $M'Oz$ يمسح الفراغ كله مرة واحدة ولذلك سنفرض ان المقادير ρ,θ,z تحقق الشروط الآتية :

$$0 \leqslant \theta < 2\pi \ , \ \rho \geqslant 0 \ , \ -\infty < z < +\infty$$

كي يقابل كل نقطة في الفراغ ثلاثي مرتب وحيد (ρ,θ,z) من الاحداثيات الاسطوانية (عدا نقاط المحور oz التي من أجلها تكون θ غير معينة) .



شكل (٥)

ويمكن أن نرى بسهولة من الشكل(٥) العلاقات التي تربط الاحداثيات الديكارتية للنقطة M باحداثياتها الاسطوانية، فالعلاقات الآتية :

$$z = z \ , \ \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} \ , \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

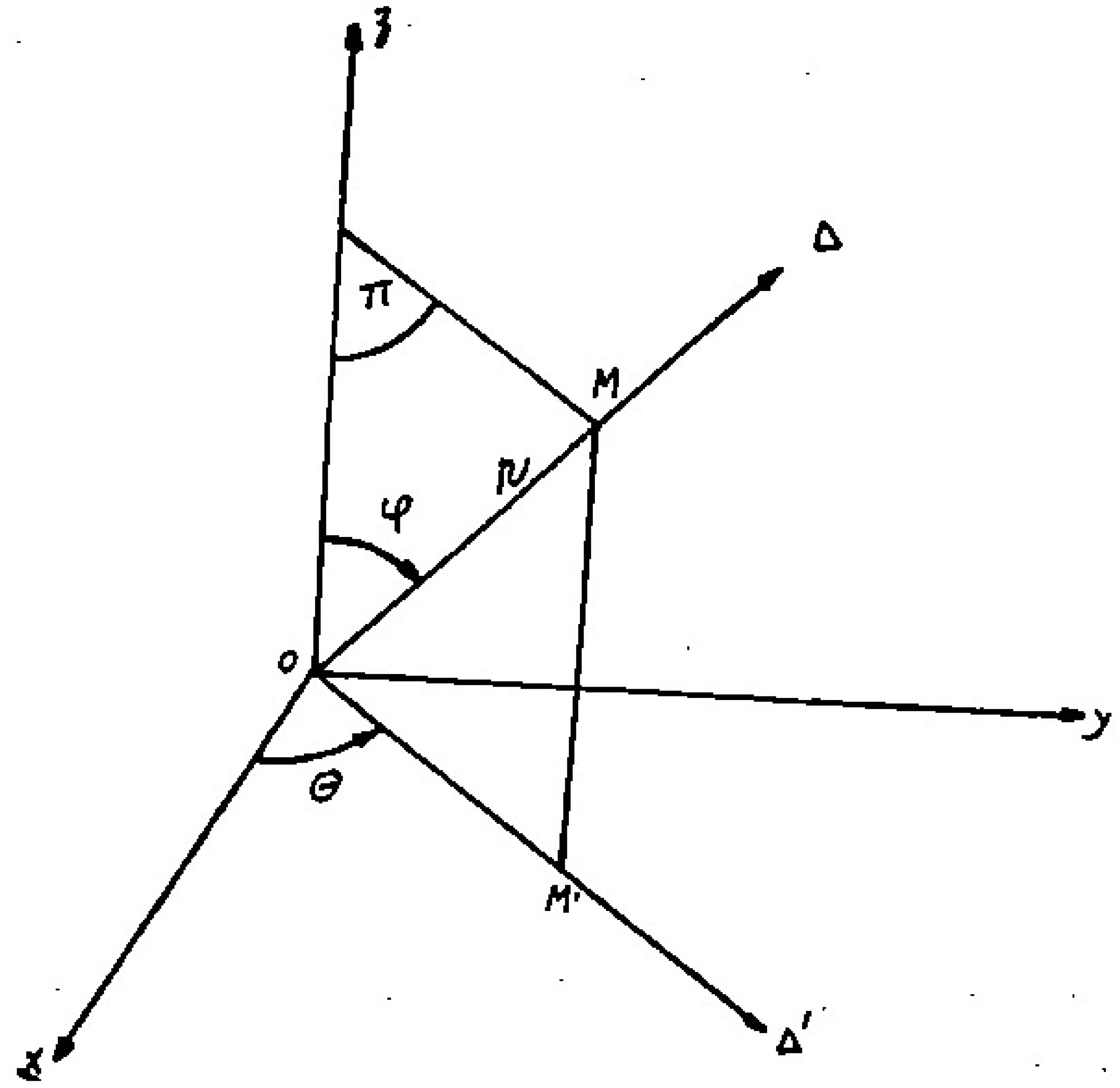
تعين الاحداثيات الاسطوانية لنقطة بدلالة احداثياتها الديكارتية ،كما أن العلاقات آلاتية :

$$x = \rho\cos\theta \ , \ y = \rho\sin\theta \ , \ z = z$$

تعين الاحداثيات الديكارتية لنقطة بدلالة احداثياتها الاسطوانية.

(1.6) ـ الاحداثيات الكروية :

يفرض M نقطة في الفراغ منسوبة الى جملة المحاور الاحداثية $oxyz$ ولتكن M' مسقطها على المستوي xoy شكل (٦).



شكل (٦)

نلاحظ من الشكل ان النقطة M والمحور oz يعينان مستويا π هذا المستوي يتعين تماما بمعرفة الزاوية θ الكائنة بين المحور $O\Delta$ المار من M' والمحور Ox ،وبعد تعيين المستوي π يمكن تعيين وضع النقطة M في هذا المستوي باحداثييها القطبيين r,φ حيث φ الزاوية الكائنة بين المحور Oz كمحور قطبي والمحور $O\Delta$ المار من النقطة M و r طول نصف القطر الشعاعي $\vec{OM}$ ،فالمقادير الثلاثة r,θ,φ تعين تماما وضع النقطة M في الفراغ ،هذه المقادير تدعى بالاحداثيات الكروية (أو الاحداثيات القطبية في الفراغ) للنقطة M ،ونرمز للنقطة M التي احداثياتها القطبية r,θ,φ بالرمز $M(r,\theta,\varphi)$.

نلاحظ أيضا ان نصف المستوي π يمسح الفراغ كله مرة واحدة عندما تتحول θ في المجال $[0,2\pi[$ ،كما أن نصف القطر الشعاعي $\vec{OM}$ يمسح نصف المستوي π كله مرة واحدة عندما تتحول φ في المجال $[0,\pi]$ لذلك سنفرض ان المقادير r,θ,φ تحقق الشروط الآتية :

$$0 \le \varphi \le \pi \quad , \quad 0 \le \theta < 2\pi \quad , \quad r \ge 0$$

كي يقابل كل نقطة في الفراغ ثلاثي مرتب وحيد (r,θ,φ) من الاحداثيات الكروية (عدا نقاط Oz) .

ويمكن ان نرى بسهولة من الشكل(٦) العلاقات التي تربط الاحداثيات الديكارتية لنقطة باحداثياتها الكروية ،فالعلاقات الآتية

$$z = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi\sin\theta \quad , \quad x = r\sin\varphi\cos\theta$$

تعين الاحداثيات الديكارتية لنقطة بدلالة احداثياتها الكروية ،كما أن العلاقات الآتية :

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad , \quad \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} \quad , \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

تعين الاحداثيات الكروية للنقطة بدلالة احداثياتها الديكارتية .

(1.7) – الوسطاء الموجهة والتجيبات الموجهه لمنحى في الفراغ:

أ– وسطاء التوجيه :

بفرض p,q,r مركبات الشعاع $\vec{V}$ في الفراغ ،فمجموعة المستقيمات أو المحاور او الاشعة الموازية لهذا الشعاع يكون لها نفس منحى الشعاع $\vec{V}$ ،لذلك يمكن أن نقول : ان كل شعاع مثل $\vec{V}(p,q,r)$ يعين منحى في الفراغ ،والمقادير السلمية p,q,r تسمى وسطاء توجيه هذا المنحى او أمثال توجيهه شكل (٧).

نستنتج من هذا التعريف ان شعاعين متوازيين يعينان منحى واحدا،فاذا كان $\vec{V}(p,q,r)$ ،$\vec{V'}(p',q',r')$ شعاعين متوازيين (مرتبطين خطيا) عندئذ نكتب :

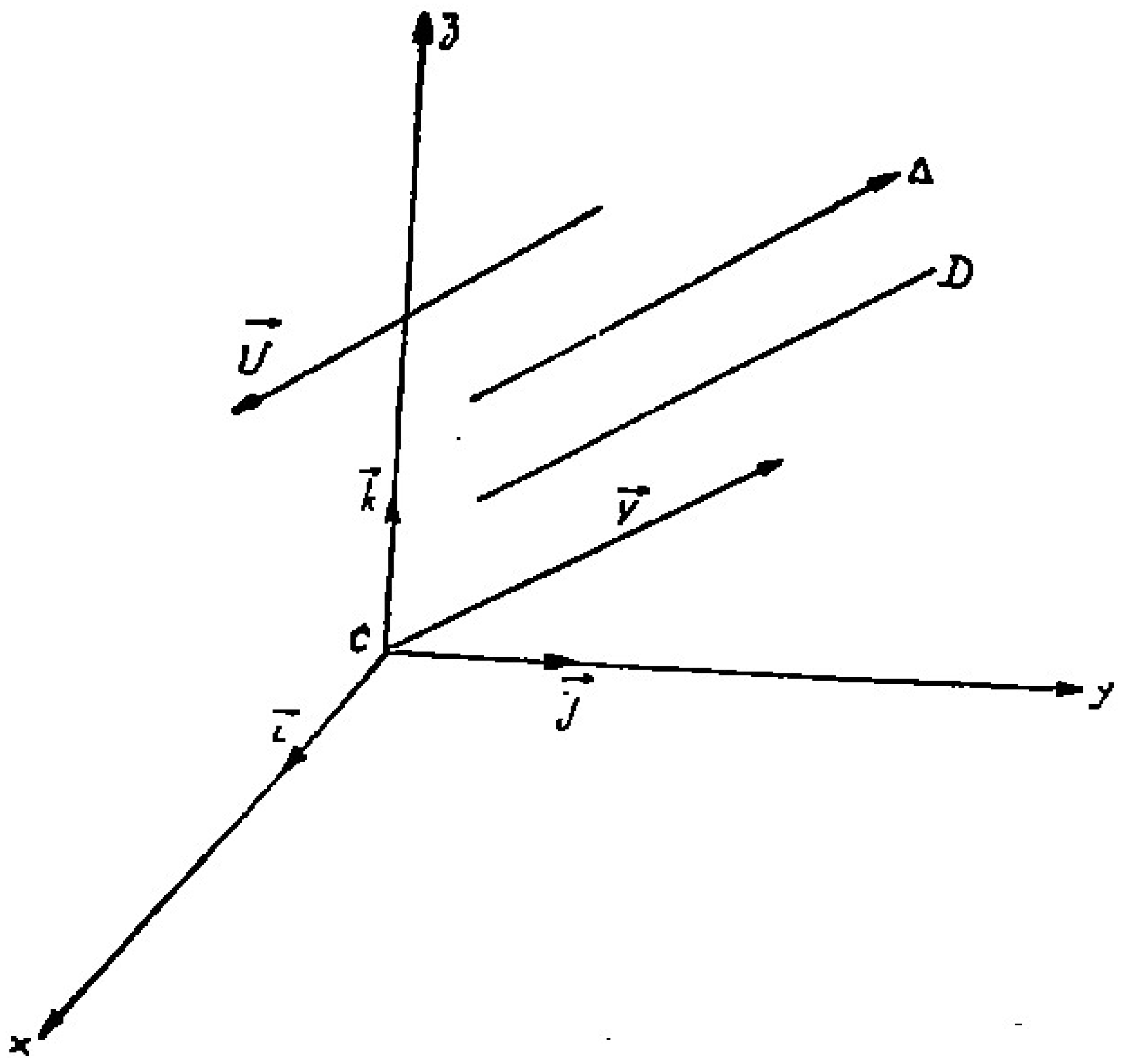
$$\vec{V} \parallel \vec{V'} \iff \vec{V} = \lambda\vec{V'} \quad (\lambda \neq 0)$$

وبالتالي نكتب :

$$p = \lambda p' \quad , \quad q = \lambda q' \quad , \quad r = \lambda r' \qquad (1.7.1)$$

نستنتج من هذه العلاقة أن :

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \qquad (1.7.2)$$



شكل (٧)

فالعلاقة (1.7.2) هي الشرط اللازم والكافي لتوازي منحنيين ونلاحظ من العلاقة (1.7.1) أنه اذا انعدمت احدى مركبات الشعاع $\vec{V}$ فان المركبة المقابلة لها للشعاع $\vec{V'}$ تنعدم أيضا ،فمثلا اذا كانت $r'=0$ فان $r=0$ وفي هذه الحالة يكون كل من الشعاعين V',V عموديا على المحور Oz وعندئذ يكون شرط التوازي مقصورا على تحقيق التناسب :

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}$$

مثال (١):

الشعاعان $\vec{V}(2,3,4)$, $\vec{V'}(4,6,8)$ يمثلان منحنيين متوازيين لان العلاقة (1.7.2) محققة .

مثال(٢):

الشعاعان $\vec{V'}(0,2,1),\vec{V}(0,1,4)$ يمثلان منحنيين يعامدان المحور Ox وغير متوازيين .

٢- جيوب تمام التوجيه :

اذا رسمنا من مبدأ الاحداثيات شعاع الواحدة $\vec{u}$ الذي مركباته على المحاور الاحداثية هي : α, β, γ موازيا لشعاع المنحنى $\vec{V}(p,q,r)$ فيمكن ان نقول : ان الشعاع $\vec{u}$ يمثل نفس المنحى المعين بالشعاع $\vec{V}$ شكل (٨).

فاذا كانت $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ الزوايا التي يصنعها الشعاع $\vec{u}$ مع المحاور الاحداثية ox,oy,oz على الترتيب فان :

$$\begin{aligned} \overline{OM_1} &= \alpha = \cos\theta_1 \\ \overline{OM_2} &= \beta = \cos\theta_2 \\ \overline{OM_3} &= \gamma = \cos\theta_3 \end{aligned} \qquad (1.7.3)$$

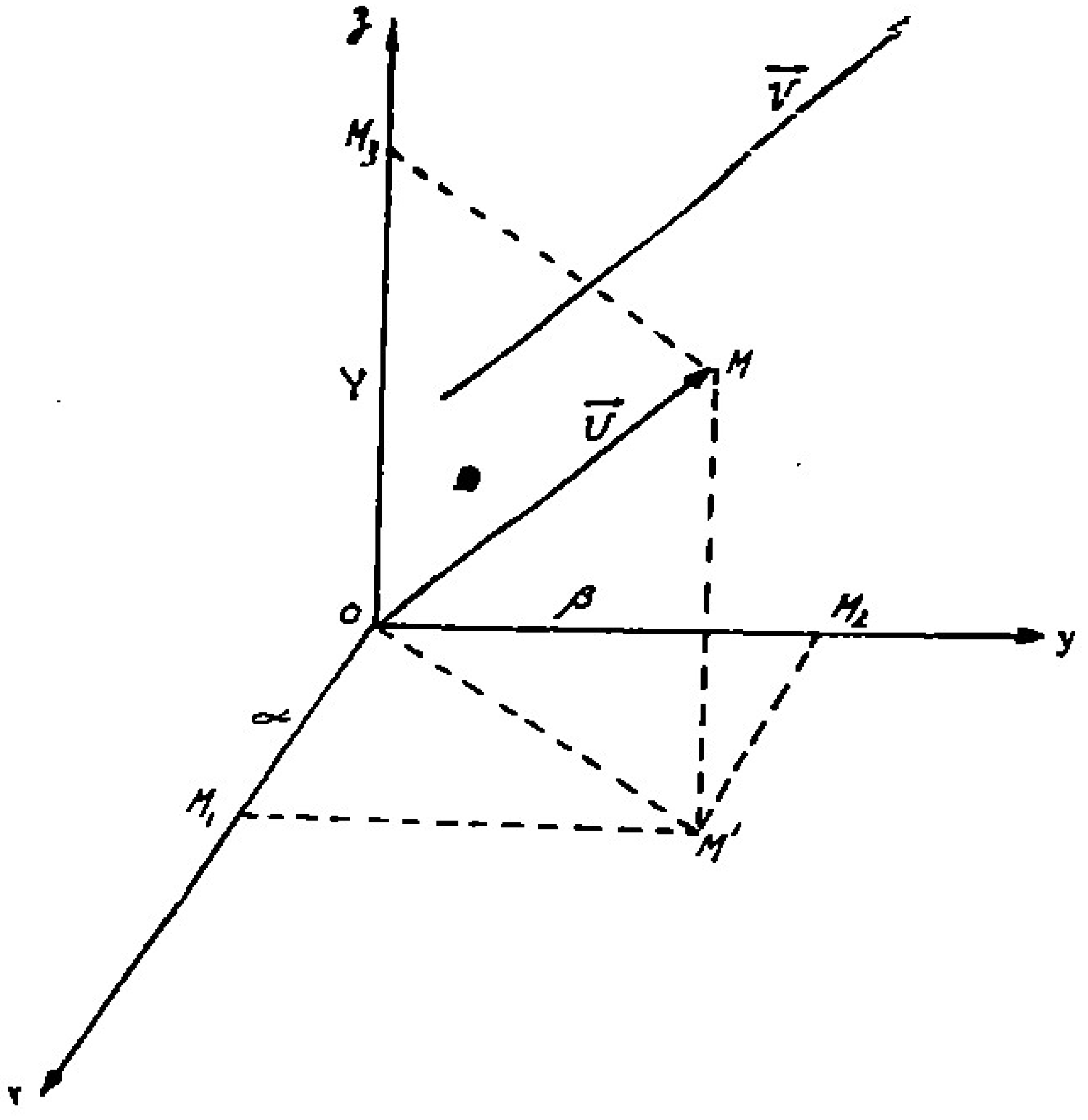
فالمركبات α, β, γ لشعاع الواحدة $\vec{u}$ على محاور الاحداثيات تسمى بجيوب تمام توجيه هذا المنحى لانها تساوي جيوب تمام الزوايا $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ وبما ان $|\vec{u}| = 1$ فان جيوب تمام التوجيه ترتبط فيما بينها بالعلاقة :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad (1.7.4)$$

(1.8) ـ العلاقة بين وسطاء توجيه وجيوب تمام توجيه منحى معلوم:

بفرض $\vec{V}(p,q,r)$ شعاع توجيه منحى معلوم و $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع الواحدة الموازي له عندئذ نكتب :

$$\vec{V} = |\vec{V}|\,\vec{u}$$



شكل (٨)

وبالتالي :

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

فاذا اسقطنا هذه العلاقة على المحاور الاحداثية الثلاث نجد:

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \; , \; \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \; , \; \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \qquad (1.8.1)$$

هذه العلاقات الثلاثة تعطي جيوب تمام توجيه منحى بدلالة وسطاء توجيهه .

مثال :

عيّن جيوب تمام توجيه المنحى المعين بالشعاع $\vec{V}(1,2,-2)$ ،

بتطبيق (1.8.1) نجد :

$$\alpha = \frac{1}{3} \; , \; \beta = \frac{2}{3} \; , \; \gamma = \frac{-2}{3}$$

ملاحظة :

يمكن تعيين منحى في الفراغ بنقطتين معلومتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $M_2(x_2,y_2,z_2)$ فأقول ان هاتين النقطتين تعينان منحى في الفراغ وسطاء توجيهه هي مركبات الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ أي :

$$p=x_2-x_1, \; q=y_2-y_1, \; r=z_2-z_1$$

وبالتالي فان جيوب تمام توجيه هذا المنحى هي :

$$\alpha = \frac{x_2-x_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} \; , \; \beta = \frac{y_2-y_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} \; , \; \gamma = \frac{z_2-z_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}$$

مثال :

عيّن وسطاء توجيه وجيوب تمام توجيه المنحى المعين بالنقطتين

$\cdot M_2(4, 3, 1), M_1(2, 1, 0)$

١ـ وسطاء التوجيه :

$p = 4-2 = 2 \ , \ q = 3-1 = 2 \ , \ r = 1-0 = 1$

٢ـ جيوب تمام التوجيه :

$$\alpha = \frac{2}{3} \ , \ \beta = \frac{2}{3} \ . \qquad = \frac{1}{3}$$

ملاحظة :

ان امثال توجيه المناحي موازية للمحور Ox هي (P,0,0) حيث $p \neq 0$ لان هذه المناحي تعامد المحورين oz,oy .

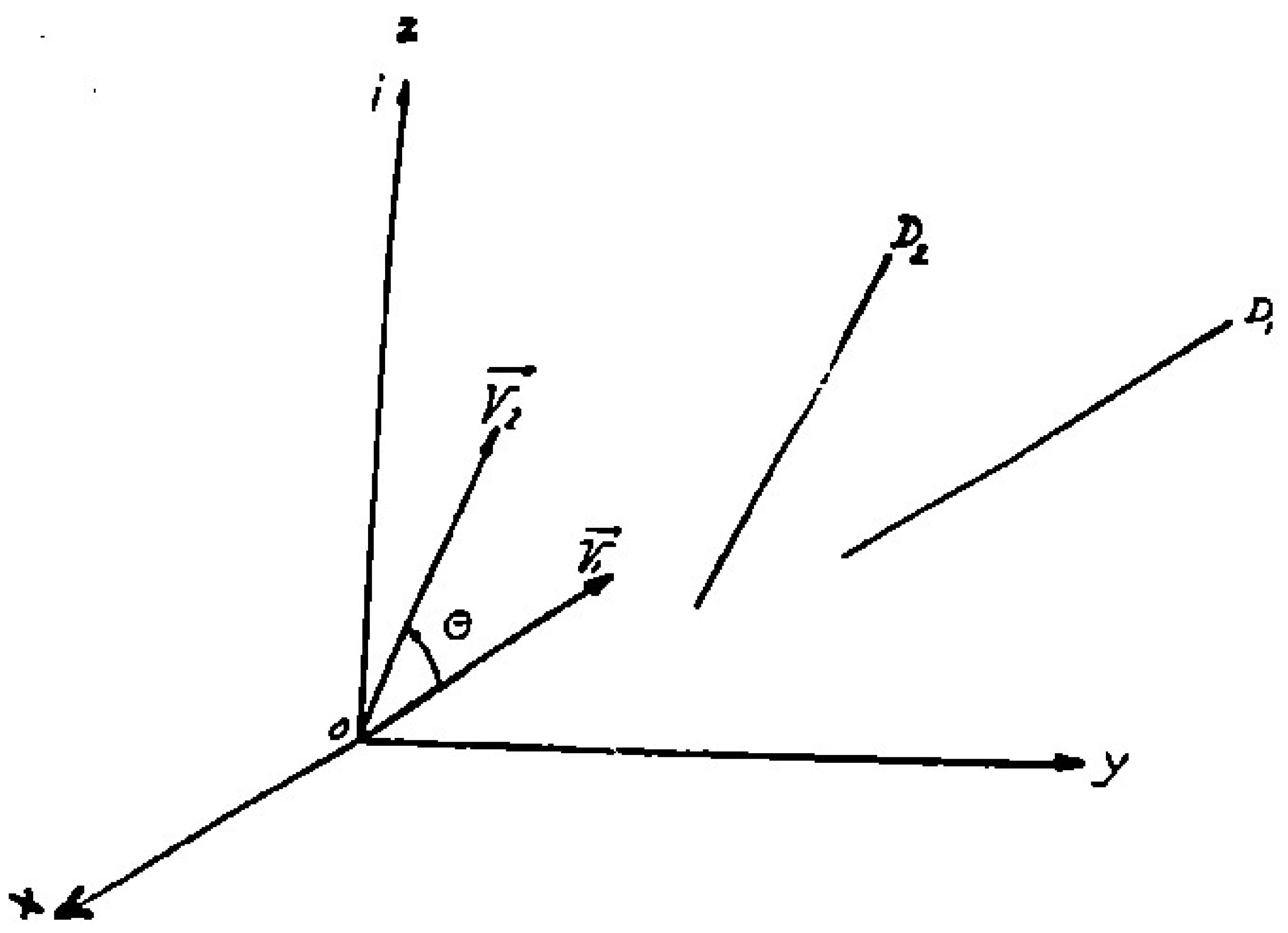
أما المناحي التي توازي المحورين oz,oy فأمثال توجيهها (0,q,o) , (0,0,r) على الترتيب ،كما أن جيوب تمام توجيه هذه المحاور هي : (1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1) على الترتيب .

(1.9) ـ الزاوية بين منحنيين (أو مستقيمين)

اذا كان D_1 مستقيما منحاه معين بالشعاع $\vec{V}_1(p_1,q_1,r_1)$ و D_2 مستقيم منحاه معين بالشعاع $\vec{V}_2(p_2,q_2,r_2)$ ،وكانت θ الزاوية الكائنة بين الشعاعين $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ شكل(٩) عندئذ حسب تعريف الجداء السلمي لشعاعين نكتب :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| . |\vec{V}_2| \cos\theta$$

ومنه :



شكل (٩)

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \ |\vec{V}_2|}$$

$$\cos\theta = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

نلاحظ ان الطرف الايمن يكون ذا قيمة جبرية موجبة عندما تكون θ زاوية حادة وسالبة عندما تكون θ زاوية منفرجة ،هذه الاشارة تفيدنا في تعيين الزاوية الكائنة بين محورين موجهين باتجاهي $\vec{V}_2, \vec{V}_1$.

اما في حالة مستقيمين (أو منحنيين) فيمكن اعتبار الزاوية

بينهما هي الزاوية θ أو مكملتها.

فاذا عرفنا الزاوية بين مستقيمين بأنها الزاوية الحادة الكائنة بينهما عندئذ نأخذ الطرف الايمن بالقيمة المطلقة فقط أي :

$$\cos\theta = \frac{|p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}} \qquad (1.9.1)$$

وفي حالة تعامد المنحنيين تكون $\theta = \frac{\pi}{2}$ وبالتالي يكون :

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0 \qquad (1.9.2)$$

هو شرط التعامد .

واذا تعين المنحيان بجيوب تمام التوجيه يكون :

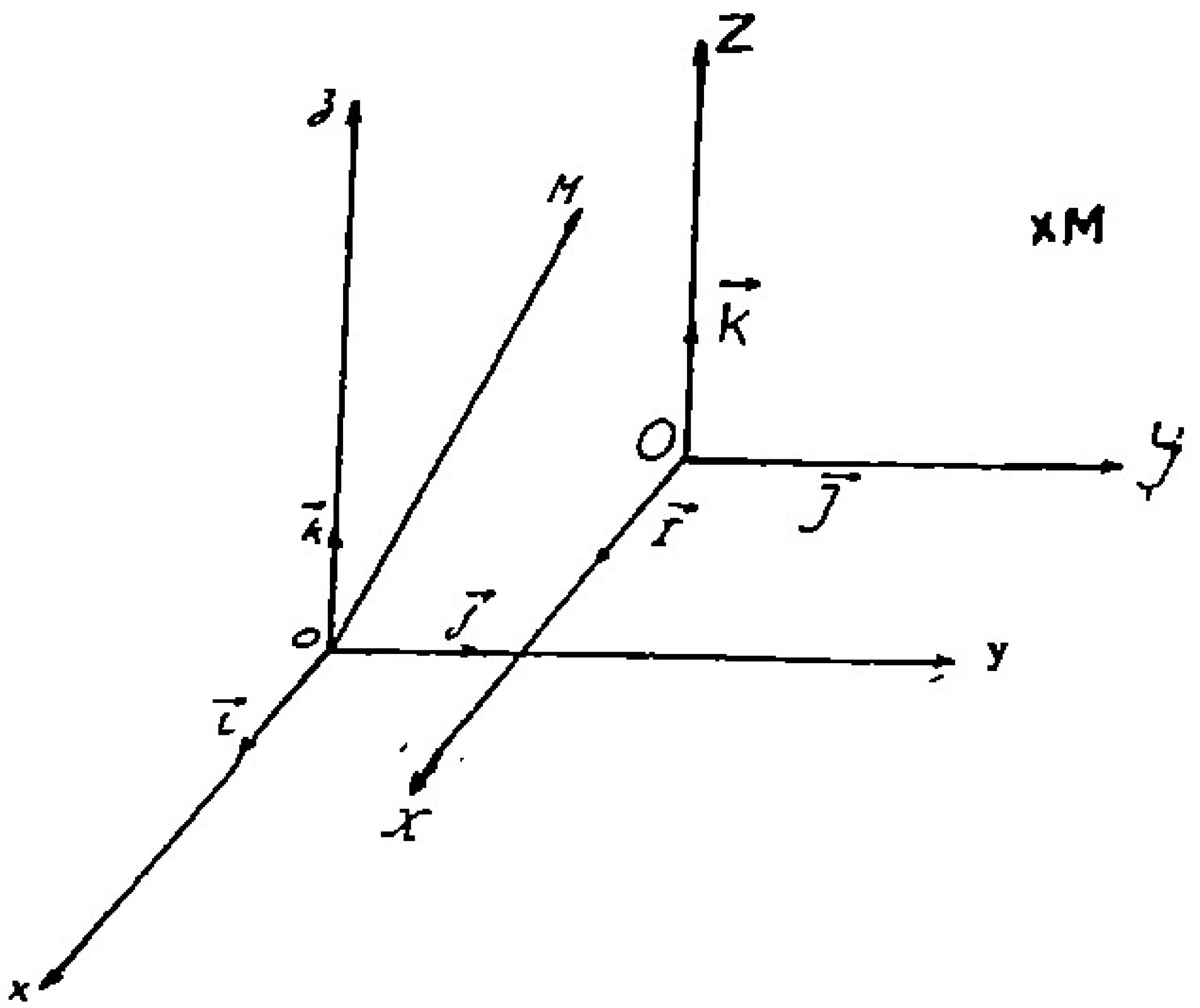
$$\cos\theta = |\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2|$$

وشرط التعامد يصبح :

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \qquad (1.9.3)$$

(1.10) – انسحاب جملة المحاور الاحداثية :

بفرض $oxyz$ جملة محاور احداثية (قائمة أو مائلة) ،ولتكن $\vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k}$ اشعة الواحدة المحمولة على المحاور ox, oy, oz على الترتيب . اذا طبقنا على هذه الجملة انسحابا معينا بالشعاع $\vec{oO}$ حيث O نقطة احداثياتها (x_o, y_o, z_o) شكل(١٠) تأخذ الوضع الجديد $OXYZ$ وتكون $\vec{I}\,,\ \vec{J}\,,\ \vec{K}$ اشعة الواحدة المحمولة على المحاور الجديدة $OX\,,\ OY\,,\ OZ$.



شكل (١٠)

بما أن جملة المحاور الجديدة نشأت من الجملة الاصلية بانسحاب فقط فان أشعة الواحدة $\vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k}$ تكون مساوية لاشعة الواحدة $\vec{I}\,,\ \vec{J}\,,\ \vec{K}$ على الترتيب .

اذا كانت M نقطة في الفراغ منسوبة الى الجملة $oxyz$ احداثياتها $x, y, z,$ ونسبنا هذه النقطة الى جملة المحاور الجديدة $OXYZ$ تكون احداثياتها الجديدة X, Y, Z . ولنوجد العلاقة بين احداثيات النقطة M منسوبة للجملة الاصلية والجملة الجديدة.

من الشكل(١٠) لدينا العلاقة الشعاعية :

$$\vec{oM} = \vec{oO} + \vec{OM}$$

ومنها نجد :

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k} + X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

وبما أن :

$$\vec{i} = \vec{I} \quad , \quad \vec{j} = \vec{J} \quad , \quad \vec{k} = \vec{K}$$

يكون :

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_o + X)\vec{i} + (y_o + Y)\vec{j} + (z_o + Z)\vec{k}$$

ومنها نجد :

$$x = x_o + X \quad , \quad y = y_o + Y \quad , \quad z = z_o + Z \qquad (1.10.1)$$

هذه العلاقات تربط الاحداثيات القديمة بالاحداثيات الجديدة وتسمح لنا بحساب احداها بدلالة الاخرى .

مثال(١) :

لتكن $M(1,2,-1)$ نقطة من الفراغ منسوبة الى الجملة oxyz عيّن احداثيات هذه النقطة بالنسبة لجملة جديدة ناتجة عن الاولى بانسحاب معين بالشعاع :

$$\vec{oO} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

الحل :

ان المركز الجديد للجملة هو النقطة $O(1,-2,-3)$ بتطبيق دساتير الانسحاب (1.10.1) نجد :

$$1 = 1 + X \quad , \quad 2 = -2 + Y \quad , \quad 1 = -3 + Z$$

ومنه نجد :

$$= o \quad , \quad Y = 4 \quad , \quad Z = 2$$

مثال(٢) :

عيّن الانسحاب المناسب للجملة oxyz بحيث تحذف الحدود الخطية من المعادلة الآتية :

$$x^2 + xy + 2x + y - 1 = 0$$

الحل :

نفرض أن مركز الجملة الجديدة هو النقطة $O(x_o, y_o, z_o)$

بتطبيق دساتير الانسحاب :

$$x = x_0 + X \quad , \quad y = y_0 + Y \quad , \quad z = z_0 + Z$$

تصبح المعادلة المعطاة بالشكل :

$$(x_o + X)^2 + (x_o + X)(y_o + Y) + 2(x_o + X) + (y_o + Y) - 1 = 0$$

بفك الاقواس وترتيب الحدود تصبح بالشكل :

$$X^2 + XY + (2x_o + y_o + 2)X + (x_o + 1)Y + x_o^2 + x_o y_o + 2x_o + y_o - 1 = 0$$

وكي تنعدم الحدود الخطية في هذه المعادلة يجب أن تكون أمثال الحدود الخطية مساوية للصفر ، أي :

$$2x_o + y_o + 2 = 0 \quad , \quad x_o + 1 = 0$$

بحل جملة هاتين المعادلتين نجد :

$$x_o = -1 \quad , \quad y_o = 0$$

مع $z_o = 0$ لان المعادلة الاخيرة لا تحوي حدا خطيا في Z .

فالمركز الجديد هو :

$$O(-1, 0, 0)$$

وبالتالي فالمعادلة الاصلية تصبح بالنسبة للجملة الجديدة بالشكل :

$$X^2 + XY - 2 = 0$$

نستنتج من هذا المثال أن الانسحاب المناسب لجملة المحاور الاحداثية يحذف لنا الحدود الخطية من المعادلة الاصلية، وبالتالي فان الشكل الجديد للمعادلة يسهل علينا التعرف على الشكل الهندسي الذي تمثله المعادلة.

(1.11) ـ دوران جملة المحاور الاحداثية القائمة حول احد المحاور

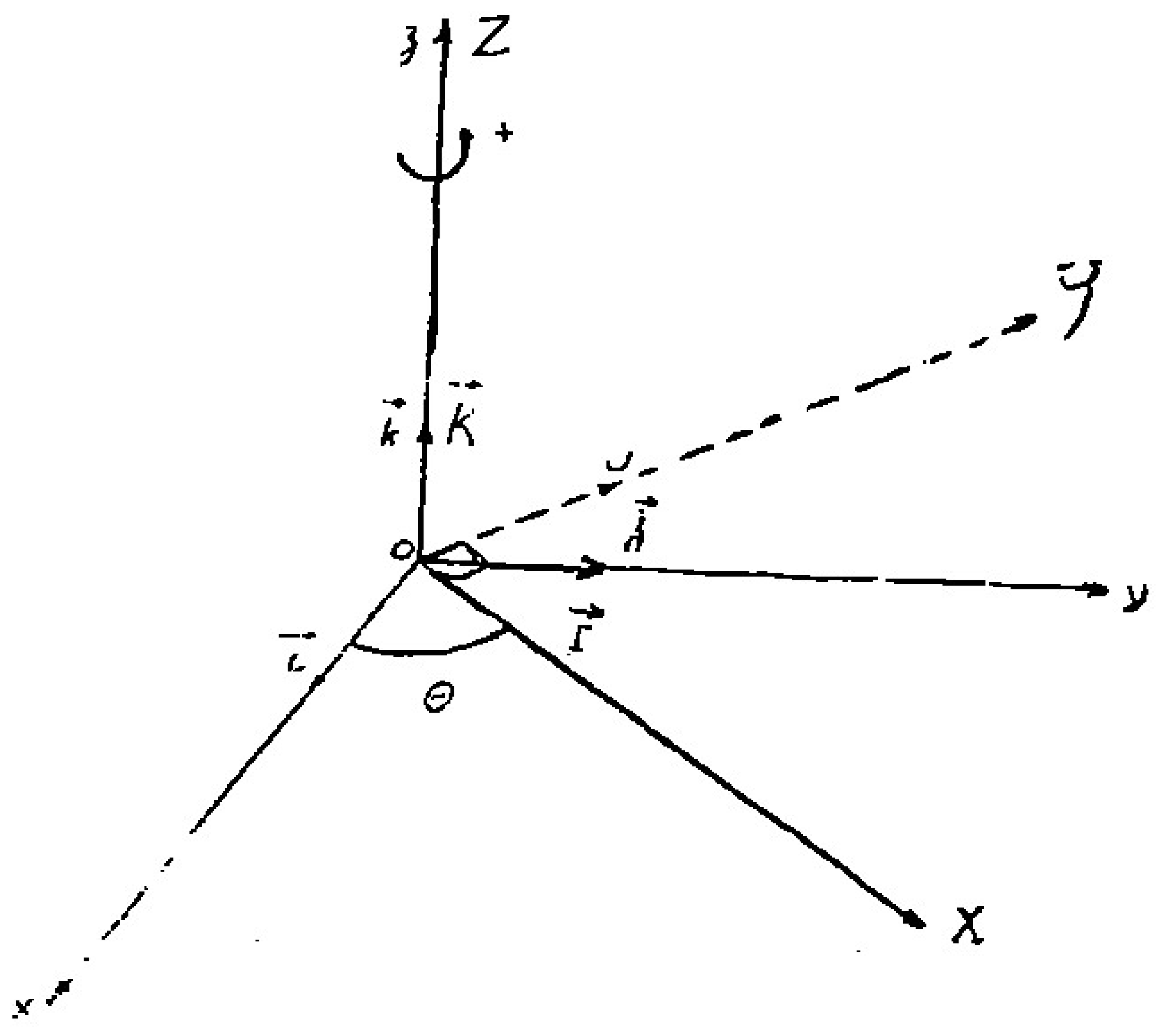
بفرض oxyz جملة محاور احداثية قائمة ومباشرة، ولنفرض أننا طبقنا على هذه الجملة دورانا مباشرا حول المحور oz بزاوية جبرية θ، فحصلنا على الجملة الجديدة oXYZ شكل(١١).

ولتكن $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ أشعة الواحدة المحمولة على محاور الجملة الجديدة.

ولتكن M نقطة من الفراغ احداثياتها x,y,z بالنسبة للجملة الاصلية و X,Y,Z احداثياتها بالنسبة للجملة الجديدة ولنوجد العلاقات التي تربط احداثيات النقطة في الجملتين. من الشكل(١١) لدينا :

$$\vec{oM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} \qquad (1.11.1)$$

لكن :



شكل (١١)

$$\vec{I} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + o\,\vec{k}$$

$$\vec{J} = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} + o\,\vec{k}$$

$$\vec{K} = o\,\vec{i} + o\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$$

أو باختصار :

$\vec{I}(\cos\theta, \sin\theta, o)$, $\vec{J}(-\sin\theta, \cos\theta, o)$, $\vec{K}(o, o, 1)$

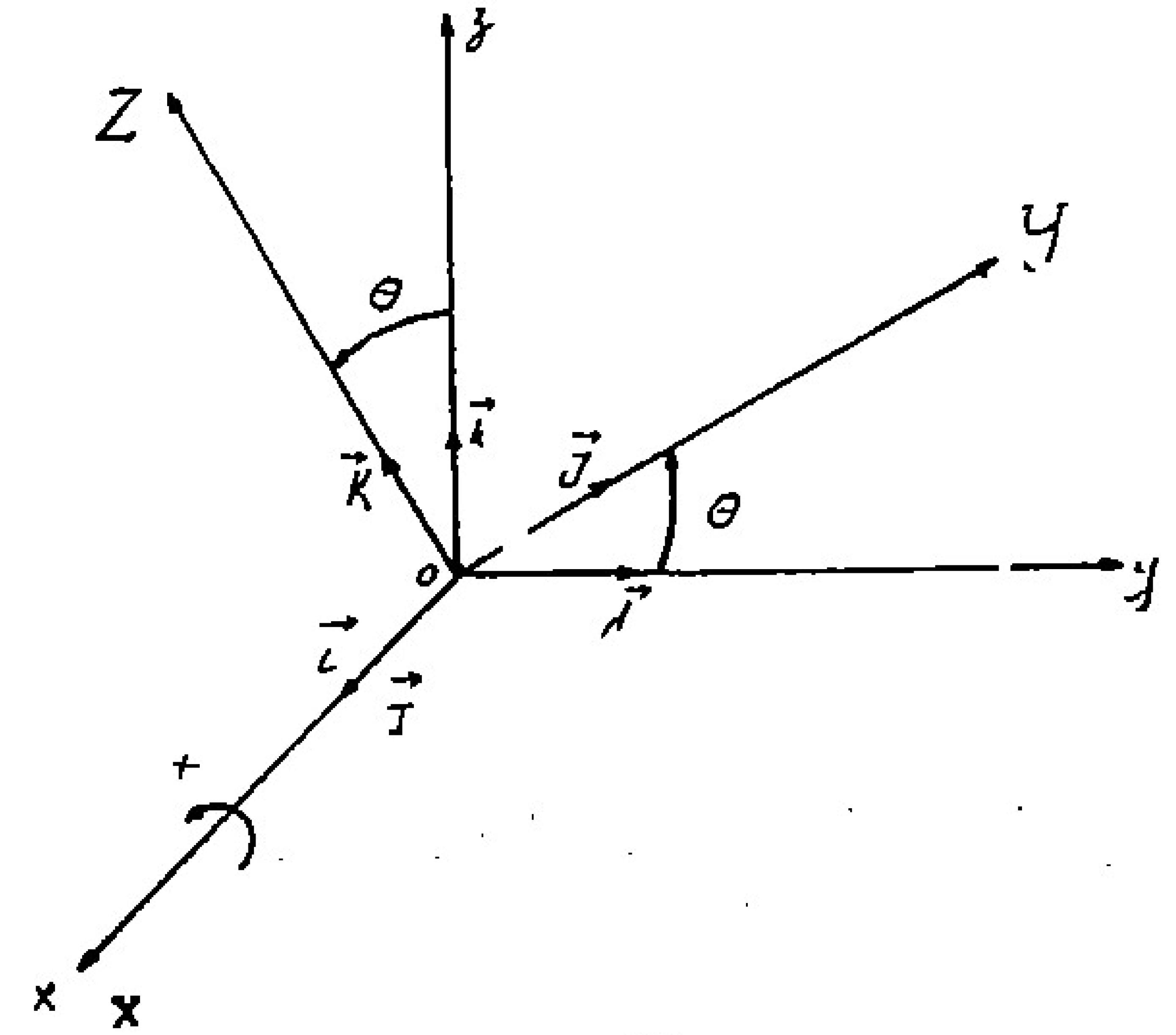
باسقاط العلاقة (1.11.1) على المحاور الاصلية نجد:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta \\ z &= Z \end{aligned}\right\} \quad (1.11.2)$$

واذا تم الدوران حول المحور ox بزاوية جبرية θ شكل (١٢)

نجد بصورة مماثلة لما سبق ان :

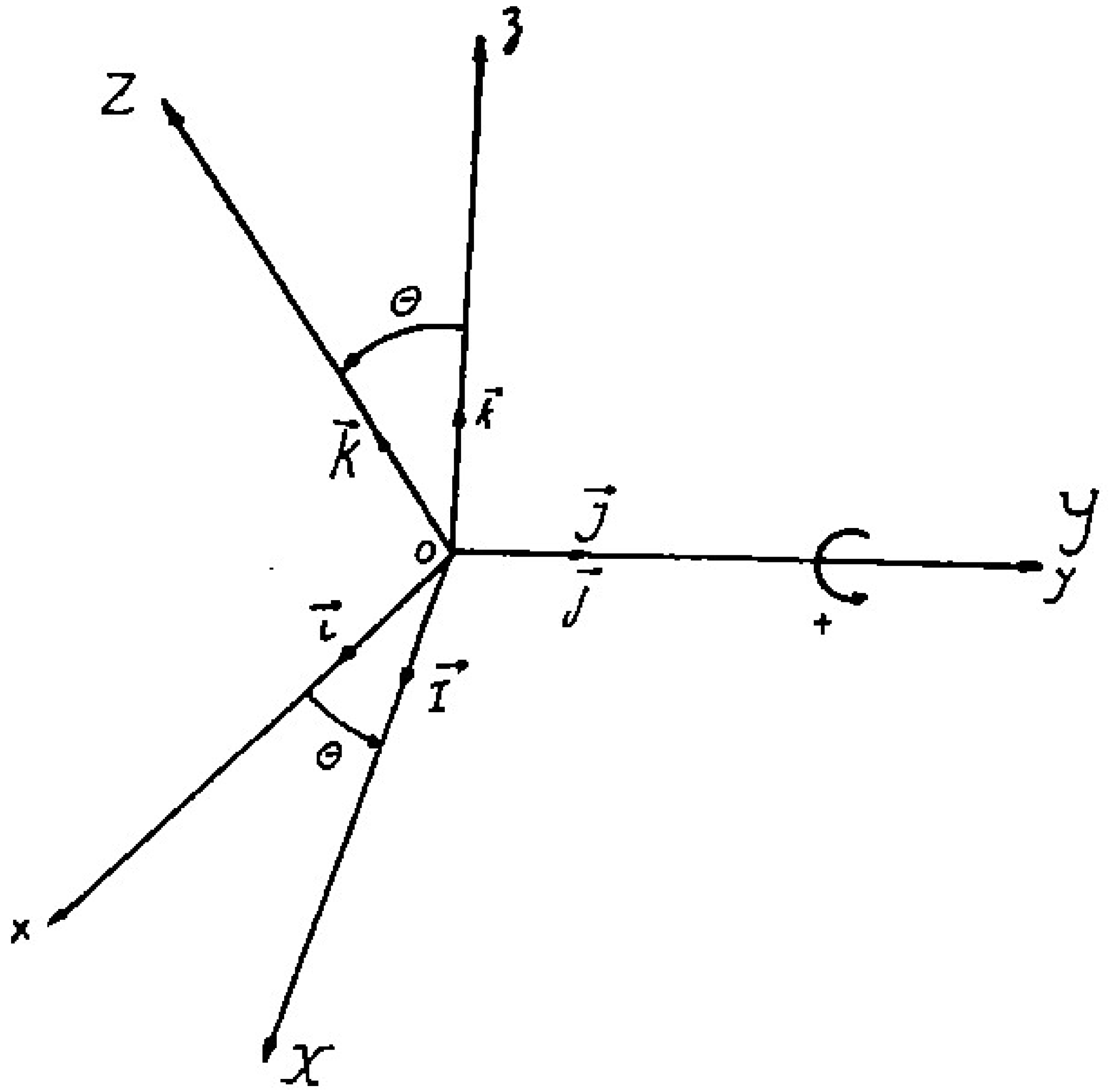
$$\left.\begin{aligned} x &= X \\ y &= Y\cos\theta - Z\sin\theta \\ z &= Y\sin\theta + Z\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (1.11.3)$$



شكل (١٢)

كذلك اذا تم الدوران حول المحور oy بزاوية جبرية θ شكل (١٣) نجد :

$$\left.\begin{aligned} x &= Z\sin\theta + X\cos\theta \\ y &= Y \\ z &= Z\cos\theta - X\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (1.11.4)$$



شكل (١٣)

ملاحظـــات :

ان العلاقات (1.11.2)،(1.11.3)،(1.11.4) تسمح لنـــا بحساب الاحداثيات القديمة x,y,z للنقطة M بدلالة احداثياتهـــا الجديدة X,Y,Z وزاوية الدوران θ ،كما تسمح لنا بحسابالاحداثيات

الجديدة للنقطة بدلالة احداثياتها القديمة وزاوية الدوران θ،وذلك بحل جملة المعادلات الواردة في كل من العلاقات الثلاثة السابقة،كما يمكن الحصول على ذلك مباشرة من العلاقة الشعاعية :

$$\vec{oM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + x\,\vec{k} \qquad (1.11.5)$$

ففي حالة الدوران حول المحور oz بزاوية جبرية θ يكون :

$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{I} + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{J} + o\,\vec{K}$$

$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{I} - \sin\theta\,\vec{J} + o\,\vec{K}$$

كذلك يكون :

$$\vec{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{I} + \cos\theta\,\vec{J} + o\,\vec{K}$$

$$\vec{j} = \sin\theta\,\vec{I} + \cos\theta\,\vec{J} + o\,\vec{K}$$

كذلك يكون :

$$\vec{k} = o\,\vec{I} + o\,\vec{J} + 1\,\vec{K}$$

باسقاط العلاقة (1.11.5) على المحاور الجديدة نجد :

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ Y &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ Z &= z \end{aligned}\right\} \qquad (1.11.6)$$

فالعلاقات (1.11.6) تعطي الاحداثيات الجديدة للنقطة بدلالة احداثياتها القديمة وزاوية الدوران θ .

اذا قارنا العلاقات (1.11.2) بالعلاقات (1.11.6) نلاحظ ان امثال الاسطر في العلاقات (1.11.2) اصبحت أمثالا للاعمدة في العلاقات (1.11.6) . كما يمكن أن نلاحظ ان العلاقات (1.11.6) يمكن الحصول عليها مباشرة من العلاقات (1.11.2) باستبدال كل x ب X وكل y ب Y وكل z ب Z وكل θ ب θ- . وهذا يمكن ادراكه بسهولة،لانه لو دارت الجملة oXYZ حول المحور oz بزاوية قدرها (θ-) لانطبقت على الجملة القديمة . كذلك يمكن ان نقول كلاما مماثلا لما سبق في حالة الدوران حول المحورين ox، oy .

مثال :

لتكن M(1,2,3) نقطة من الفراغ الثلاثي المنسوب الى جملة المحاور المتعامدة oxyz . عيّن احداثيات هذه النقطة بالنسبة لجملة محاور احداثية oXYZ ناتجة على الجملة الاولى بدوران حول المحور oz معين بالزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}$.

الحل :

بتطبيق العلاقات (1.11.2) نجد :

$$1 = X\cos\frac{\pi}{3} - Y\sin\frac{\pi}{3} = \frac{X}{2} - \frac{Y\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

$$2 = X\sin\frac{\pi}{3} + Y\cos\frac{\pi}{3} = \frac{X\sqrt{3}}{2} + \frac{Y}{2} \qquad (2)$$

$$3 = Z \qquad (3)$$

من (1) نجد :

$$X - \sqrt{3}\,Y = 2$$

من (2) نجد :

$$\sqrt{3}\,X + Y = 4$$

بحل جملة المعادلتين (1) و(2) نجد :

$$X = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \quad , \quad Y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad Z = 3$$

ويمكن الوصول الى نفس النتائج بتطبيق مباشر للعلاقات (1.11.6) :

$$X = \cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

$$Y = -\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

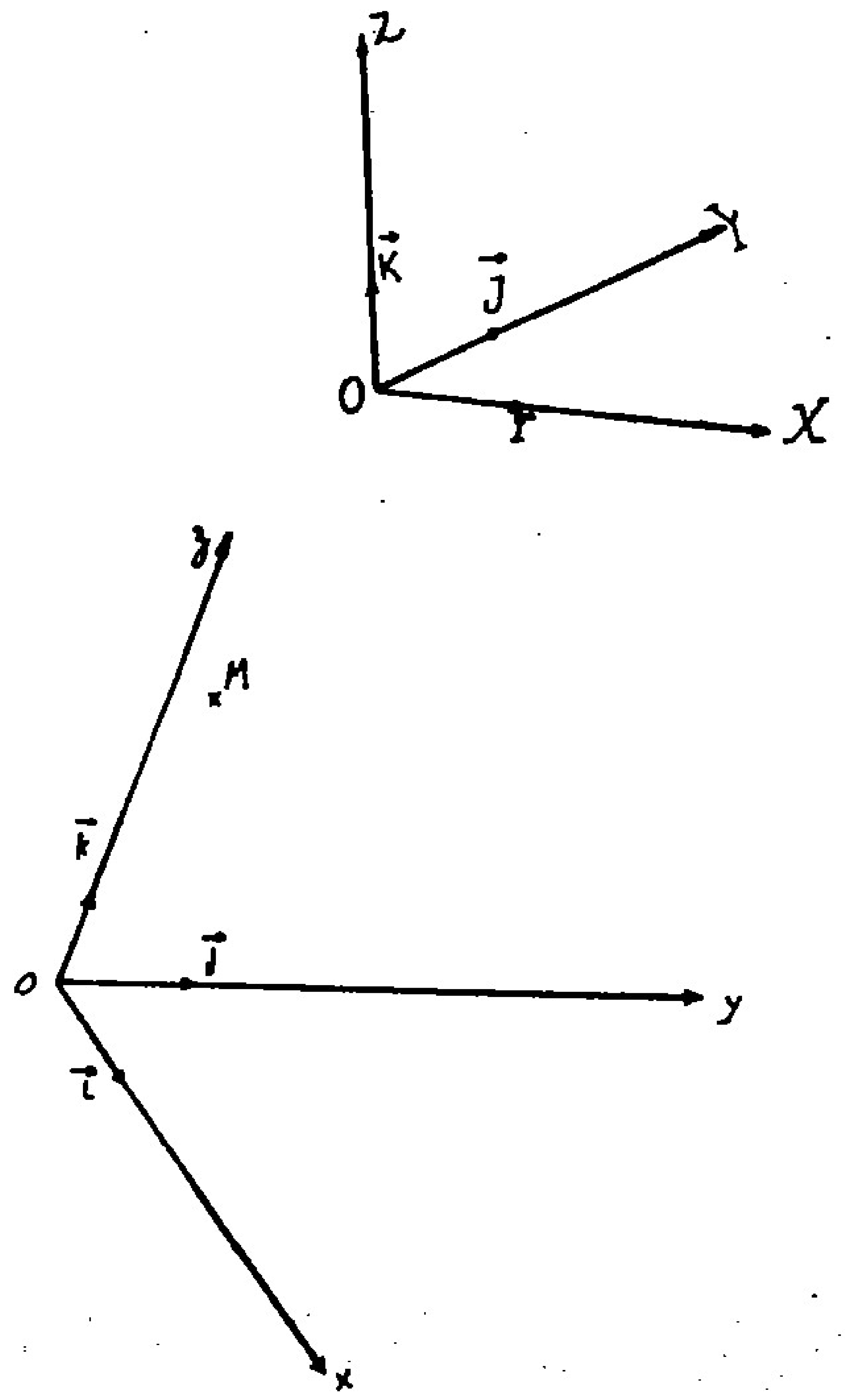
$$Z = 3$$

(1.12) ــ الحالة العامة ــ تغيير جملة المحاور الاحداثية :

بفرض oxyz جملة محاور احداثية قائمة او مائلة ولتكن $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ أشعة الواحدة محمولة على محاور هذه الجملة الشكل(١٤)

ولتكن OXYZ جملة جديدة معينة بمركزها الجديد $O(x_0,y_0,z_0)$. وباشعة الواحدة $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ المعين كل منها بمركباته الثلاثة على المحاور الاصلية.

فاذا كانت a_{11},a_{12},a_{13} مركبات الشعاع $\vec{I}$ على المحاور ox ,oy, oz على الترتيب عندئذ يكون :



شكل (١٤)

$$\vec{I} = a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j} + a_{13}\vec{k} \qquad (1.12.1)$$

واذا كانت a_{21}, a_{22}, a_{23} مركبات الشعاع $\vec{J}$ على المحاور ox, oy, oz على الترتيب عندئذ يكون :

$$\vec{J} = a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{23}\vec{k} \qquad (1.12.2)$$

وبالمثل اذا كانت a_{31}, a_{32}, a_{33} مركبات الشعاع $\vec{K}$ على المحاور ox , oy, oz على الترتيب عندئذ يكون :

$$\vec{K} = a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + a_{33}\vec{k} \qquad (1.12.3)$$

كذلك فالمركز الجديد للجملة معين بالعلاقة :

$$\vec{oO} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \qquad (1.12.4)$$

ولتكن M نقطة من الفراغ الثلاثي احداثياتها x,y,z بالنسبة للجملة الاصلية oxyz واحداثياتها X,Y,Z بالنسبة للجملة الجديدة OXYZ. من الشكل(١٤) نكتب العلاقتين الشعاعيتين :

$$\vec{oM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

ولنوجد العلاقات التي تربط الاحداثيات الجديدة X,Y,Z بالاحداثيات القديمة x,y,z للنقطة M .

من الشكل (١٤) نكتب العلاقة الشعاعية : $\vec{oM} = \vec{oO} + \vec{OM}$

$$\vec{oM} = \vec{oO} + X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} \qquad (1.12.5)$$

باسقاط هذه العلاقة على محاور الجملة oxyz والاستفادة من العلاقات (1.12.1) ، (1.12.2) ، (1.12.3) ، (1.12.4) نجد :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + Xa_{11} + Ya_{21} + Za_{31} \\ y &= y_0 + Xa_{12} + Ya_{22} + Za_{32} \\ z &= z_0 + Xa_{13} + Ya_{23} + Xa_{33} \end{aligned}\right\} \qquad (1.12.6)$$

<u>نتيجة (1)</u>:

اذا كانت الجملة oxyz متعامدة وكانت الجملة الجديدة OXYZ ناتجة عن الاولى بانسحاب فقط معين بالشعاع :

$$\vec{oO} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

فان

$$\vec{K} = \vec{k}\ ,\ \vec{J} = \vec{j}\ ,\ \vec{I} = \vec{i}$$

وبالتالي :

$$a_{11} = 1\ ,\ a_{12} = 0\ ,\ a_{13} = 0$$
$$a_{21} = 0\ ,\ a_{22} = 1\ ,\ a_{23} = 0$$
$$a_{31} = 0\ ,\ a_{32} = 0\ ,\ a_{33} = 1$$

وعندئذ العلاقات (1.12.6) تصبح :

$$x = x_0 + X$$
$$y = y_0 + Y$$
$$z = z_0 + Z$$

وهي نفس العلاقات الواردة في (1.10.1) .

نتيجه (٢)

اذا كانت الجمله oxyz متعامدة وكانت الجملة الجديدة OXYZ ناتجه عن الاولى بدوران حول المحور oz بزاوية حرية θ فان

$$a_{11} = \cos\theta \qquad a_{12} = \sin\theta \qquad a_{13} = 0$$
$$a_{21} = -\sin\theta \qquad a_{22} = \cos\theta \qquad a_{23} = 0$$
$$a_{31} = 0 \qquad a_{32} = 0 \qquad a_{33} = 1$$

وعندئذ العلاقات (1.12.6) تصبح

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$
$$z = Z$$

وهي نفس العلاقات الواردة في (1 11.2)

تمارين (1)

١- ABC مثلث رؤوسه A(6,-10,0), B(1,0,-5), C(6,10,10)
اثبت أنه مثلث قائم ثم احسب مساحته ومحيطه.

٢- ABC مثلث رؤوسه A(1,2,3), B(2,1,-1), C(2,4,2)
عيّن نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة في هذا المثلث.

٣- ارسم شكلا يبين موقع النقطة A(1,2,3) بالنسبة لجملة ثلاثية قائمة ثم أحسب بعد هذه النقطة عن المحاور الاحداثية ومبدأ الاحداثيات.

٤- عيّن زوايا المثلث الذي رؤوسه A(2,1,2), B(1,0,2), C(1,2,4)

٥- اوجد الاحداثيات الاسطوانية والكروية للنقطة $M(2\sqrt{3}, 2, 1)$

٦- أوجد الاحداثيات الديكارتية والكروية للنقطة M المعينة بالاحداثيات الاسطوانية: $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = 1$

٧- سطح معادلته الديكارتية: $x^2+y^2+z^2+2x+4y-5 = 0$
أوجد معادلة هذا السطح بالاحداثيات الكروية.

٨- أوجد أحداثيات منتصف القطعة المستقيمة AB اذا علمت أن A معينة بالاحداثيات الاسطوانية $\left(\rho = 1 , \theta = \frac{4\pi}{3} , z = 2\right)$
و B معينة باحداثياتها الكروية $\left(r = 2\sqrt{3} , \theta = \frac{\pi}{6} , \varphi = \frac{\pi}{4}\right)$

٩- برهن ان المستقيم الواصل بين النقطتين A(5,2,-3) و B(6,1,4) يوازي المستقيم الواصل بين النقطتين C(-3,-2,-1), D(-1,-4,13).

-١٠ بفرض $A(2,3,-1)$, $B(3,5,-3)$, $C(1,2,-6)$, $D(3,4,-2)$
رؤوس رباعي وجوه ، أثبت أن BA يعامد CD .

-١١ أوجد الشكل العام لوسطاء توجيه المناحي الموازيـــة
للمستويات الاحداثية .

-١٢ أوجد وسطاء توجيه ثم جيوب تمام المنحى الموازي للمستوي
xoy والذي يعامد المنحى المعين بالشعاع $\vec{V}(2,-1,1)$

-١٣ عيّن الزاوية الكائنة بين المستقيم المعيـــن بالنقطتين
$A(-3,2,4)$, $B(2,5-2)$ والمستقيم المعين بالنقطتيـــن
$C(1,-2,2)$, $D(4,2,3)$.

-١٤ أثبت أن النقاط $A(2,3-4)$, $B(5,4-6)$, [illegible]$7,8,-10)$
تقع على استقامة واحدة ثم عيّن النسبة التي تقسم بهـــا
النقطة B القطعة المستقيمة AC .

-١٥ أثبت ان النقاط $P(3,-1,4)$, $Q(-2,5,2)$, $R(8,-7,6)$
تقع على استقامة واحدة ثم عيّن النسبة التي تقسم بهـــا
النقطة Q القطعة المستقيمة PR .

-١٦ أوجد النسبة التي يقسم بها كل من المستويات الاحداثيـــة
المستقيم الواصل بين النقطتين : $A(-2,4,7)$, $B(3,-5,8)$

-١٧ اذا كانت $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ الزوايا التي يصنعها مستقيـــم مـــع
المحاور الاحداثية ، اثبت أن : $\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3 = 2$.

-١٨ مستقيم يصنع مع المحور ox زاوية $\frac{\pi}{3}$، ومع المحـــور y ،
زاوية $\frac{\pi}{4}$ عيّن الزاوية التي يصنعها مع المحور oz .

-١٩ أوجد جيوب تمام توجيه المستقيم الذي يصنع زوايا حـــادة -٢٥
متساوية مع المحاور الاحداثية .

-٢٠ عيّن الانسحاب المناسب لجملة المحاور الاحداثية القائمـــة
كي تحذف الحدود الخطية من المعادلة الاتية :

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-2=0$$

-٢١ سطح معين بالمعادلة :

$$x^2+y^2+2z^2-3xy+x-1=0$$

عيّن زاوية الدوران θ حول المحور oz لينعدم الحدالمستطيلي
في هذه المعادلة .

-٢٢ سطح معين بالمعادلة :

$$5x^2+6xy+5y^2+z^2-4x+4y+2z-4=0$$

عيّن الانسحاب المناسب ،ثم الدوران المناسب لجملة المحاور
بحيث تحذف الحدود الخطية والمستطيلة من المعاملة السابقة.

-٢٣ أوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التـــي
نسبة بعديها عن النقطتين $A(-2,2,-2)$, $B(3,-3,3)$ تساوي
$2/3$.

-٢٤ تتحرك نقطة في الفراغ بحيث يكون بعدها عن المحـــور oy
يساوي ثلاثة أمثال بعدها عن المحور oz ، أوجد معادلة المحل
الهندسي لهذه النقطة.

أوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التـــي يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين $A(2,3,4)$ و $B(2,-3,4)$ يساوي ٨

●●●●●●●●●

الفصل الثاني

المستوي

(2.1) ـ تعريف المستوي وطرق تعيينه :

نعرف المستوي بأنه سطح غير محدود اذا اشترك معه مستقيـم بأكثر من نقطة انطبق عليه في جميع أوضاعه .

ويتعين المستوي بمستقيمين متقاطعين او متوازيين أو بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ، أو بمستقيم ونقطةخارجه عنه .

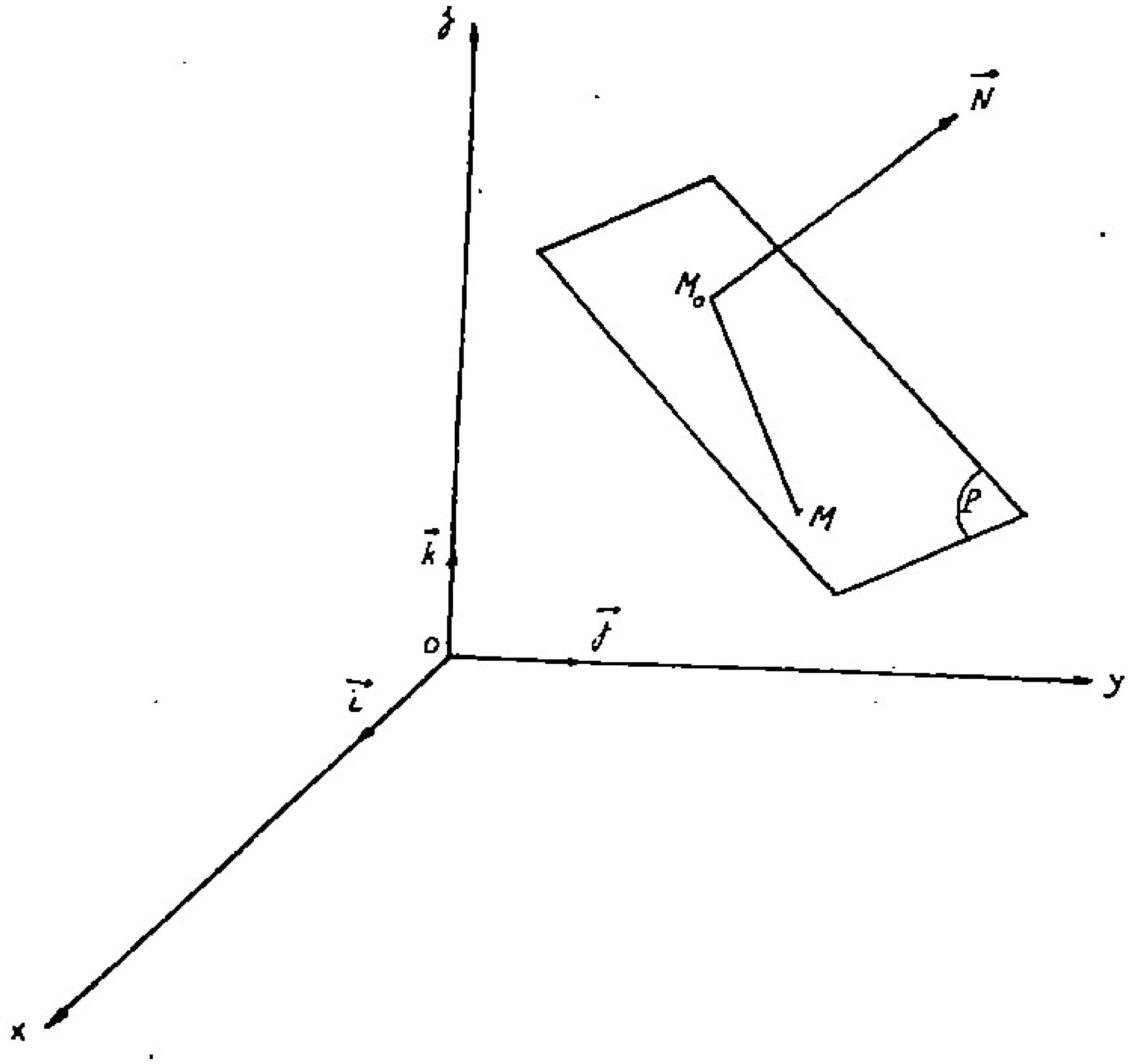
ويتعين المستوي أيضا بصورة وحيدةبمعرفـةنقطة منه ومستقيم يعامده، اعتمادا على النظرية الآتية :

من نقطة خارجة عن مستقيم(أو واقعة عليه) يمر مستو وحيـد يعامد هذا المستقيم. وسوف نستخدم هذه النظرية كنظرية أساسيـــة لايجاد معادلة المستوي .

(2.2) ـ معادلة مستو يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاعا معلوما:

لتكن $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة معلومة ولنمرر منها مستويـا P يعامد الشعاع $\overrightarrow{N}(p,q,r)$ ، هذا الشعاع يدعى بالشعاع الناظم على هذا المستوي حيث p,q,r مركبات هذا الشعاع وتدعى وسطاء توجيه منحـى

الناظم (أو أمثال توجيهه) • شكل (١٥)•



شكل (١٥)

ولتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في هذا المستوي ،ففي جميع أوضاع النقطة M في هذا المستوي يكون الشعاع $\overrightarrow{M_0M}$ عموديا على الشعاع الناظم $\vec{N}$ ،فيمكن اعتبار المستوي P بأنه المحل الهندسي للنقاط M التي من أجلها يكون :

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$$

وبالتالي يكون :

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \qquad (2.1.1)$$

هذه المعادلة تدعى بالمعادلة الشعاعية للمستوي P المار من النقطة M_0 وشعاع ناظمه الشعاع $\vec{N}$•

ونعبر عن المعادلة (2.1.1) تحليليا بالمعادلة :

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0 \qquad (2.1.2)$$

وتكتب بالشكل :

$$px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0$$

وتكتب باختصار بالشكل :

$$px+qy+rz+h=0 \qquad (2.1.3)$$

حيث :

$$h=-(px_0+qy_0+rz_0)=\text{ثابت}$$

فاذا رمزنا للطرف الايسر من المعادلة (2.1.3) بالرمز $P(x,y,z)$ عندئذ تكتب بالشكل :

$$P(x,y,z) \equiv px+qy+rz+h=0 \qquad (2.1.4)$$

وتدعى بالمعادلة العامة للمستوي ،وهي معادلة خطية في المتحولات x,y,z•

وبالعكس سبرهن أن كل معادلة خطية في المتحولات x,y,z من الشكل .

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2.1.5)$$

هي معادلة مستو .

ان المعادلة (2.1.5) يمكن أن تكتب بالشكل .

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right) + B(y - o) + C(z - o) = 0$$

حيث

$$A \neq 0$$

ونلاحظ ان المعادلة الاخيرة هي عبارة تحليلية للجداء السلمي لشعاعين متعامدين ، الاول $\vec{N}(A,B,C)$ ثابت ، والثاني هو الشعاع $\overrightarrow{M_0M}$ الذي مبدوءه النقطة الثابتة $M_0(-\frac{D}{A},0,0)$ ونهايته النقطة المتحولة M(x,y,z) . فالمحل الهندسي للنقطة M هو المستوي المار من النقطة M_0 والعمودي على الشعاع $\vec{N}$ الذي مركباته أمثال x,y,z في المعادلة (2.1.5) .

(2.2) ـ المستويات الخاصة .

وجدنا في الفقرة السابقة أن المعادلة العامة للمستوي هي:

$$P(x,y,z) \equiv px + qy + rz + h = 0$$

لندرس الحالات التي يكون فيها بعض الامثال معدومة.

١ـ لنفرض أن h = o عندئذ المعادلة تصبح بالشكل :

$$P(x,y,z) \equiv px + qy + rz = o \qquad (2.2.1)$$

نلاحظ ان هذه المعادلة تتحقق من اجل النقطة O(o,o,o) فهي معادلة مستو يمر من مبدأ الاحداثيات .

٢ـ لنفرض أن r=0 فالمعادلة تصبح بالشكل :

$$P(x,y,z) \equiv px + qy + h = 0 \qquad (2.2.2)$$

نلاحظ أن هذه المعادلة تمثل مستويا يوازي المحور oz لان وسطاء توجيه منحى الناظم في (p,q,o) أي أن مركبة الشعاع $\vec{N}$ على المحور oz معدومة وبالتالي الشعاع $\vec{N}$ يعامد المحور oz فالمستوي P يوازي المحور oz .

٣ـ لنفرض ان q=0 فالمعادلة العامة للمستوي تصبح :

$$P(x,y,z) = px + rz + h = 0 \qquad (2.2.3)$$

وهذه المعادلة تمثل مستويا يوازي المحور oy لان وسطاء توجيه منحى الناظم هي(p,o,r) أي أن مركبة الشعاع $\vec{N}$ على المحور oy معدومة وبالتالي الشعاع $\vec{N}$ يعامد المحور oy فالمستوي P يوازي المحور oy .

٤ـ لنفرض ان p=0 فالمعادلة العامة للمستوي تصبح :

$$P(x,y,z) = qy + rz + h = 0$$

وهذه المعادلة تمثل مستويا يوازي المحور ox لان وسطاء

توجيه منحى الناظم هي(0 , q , r) أي أن مركبة الشعاع $\vec{N}$ على المحور ox معدومة وبالتالي الشعاع $\vec{N}$ يعامد المحور ox فالمستوي P يوازي المحور ox .

هـ- لنفرض أن q=r=0 فالمعادلة العامة للمستوي تصبح :

$$P(x,y,z) \equiv px + h = 0 \qquad (2.2.5)$$

ومنه :

$$x = \frac{-h}{p} = a$$

حيث a عدد ثابت .

ان هذه المعادلة تمثل مستويا يوازي مستوى الاحداثيات oyz ويبعد عنه بمقدار ثابت قدره a ،لان وسطاء توجيه منحى الناظم هي (p,o,o) وهي مركبات شعاع يوازي المحور ox فهو عمودي على المستوي oyz عندئذ فالمستوي(2.2.5) يوازي المستوي oyz ،ومن جهة ثانية ان المعادلة x = a تدل على أن جميع نقاط هذا المستوي لها نفس الفاصلة الثابتة a وبالتالي فهو يوازي المستوي oyz .

واذا فرضنا في المعادلة (2.2.5) أن h = 0 ايضا عندئذ a = 0 وبالتالي x = 0 وهي تمثل معادلة المستوي oyz لان المستوي oyz هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في الفراغ التي فواصلها تساوي الصفر وبطريقة مشابهة للمناقشة السابقة ،نجد بسهولة أن المعادلة y =b تمثل مستويا يوازي مستوي الاحداثيات oxz والمعادلة y=0 تمثل معادلة مستوي الاحداثيات oxz .

كذلك المعادلة z = C تمثل مستويا يوازي مستوي الاحداثيات oxy والمعادلة z=0 تمثل معادلة مستوي الاحداثيات oxy .

مثال(١):

أوجد معادلة مستو يمر من النقطة $M_0(1,-1,2)$ ويعامد الشعاع $\vec{N}(2,1,2)$.

الحل :

ان وسطاء توجيه منحى الناظم هي (2,1,2) ولنفرض أن M(x,y,z) نقطة متحولة في هذا المستوي عندئذ تكون معادلة المستوي هي :

$$2(x-1) + 1(y+1) + 2(z-2) = 0$$

بفك الاقواس والاصلاح نجد :

$$2x + y + 2x - 5 = 0$$

طريقة ثانية :

ان معادلة المستوي المطلوب هي من الشكل :

$$px + qy + rz + h = o$$

نعوض r,q,p بما يساويها نجد :

$$2x + y + 2z + h = o$$

وبما أن المستوي يمر من النقطة $M_0(1,-1,2)$ فاحداثياتها

تحقق المعادلة السابقة فيكون :

$$2-1+4+h=0$$

$$h=-5$$

نعوض h بقيمتها في المعادلة الاخيرة نجد :

$$2x+y+2z-5=0$$

مثال(٢):

اوجد معادلة مستو يمر من النقطة $A(-1,2,1)$ ويعامد المستقيم المار من النقطتين $C(2,4,5),B(1,3,2)$ •

الحل :

ان منحى ناظم المستوي المطلوب معين بالشعاع $\overrightarrow{BC}$ ،فوسطاء توجيه هذا المنحى هي :

$$r=5-2=3\ ,\ q=4-3=1\ ,\ p=2-1=1$$

اذن معادلته :

$$(x+1)+(y-2)+3(z-1)=0$$

ومنه :

$$x+y+3z-4=0$$

مثال (٢):

عيّن جيوب تمام توجيه منحى ناظم المستوي :

$$2x-y+2z-4=0$$

الحل :

ان وسطاء توجيه منحى الناظم لهذا المستوي هي أمثال x,y,z في هذه المعادلة فتكون وسطاء التوجيه هي : $(2,-1,2)$ وبالتالي تكون جيوب تمام التوجيه :

$$\alpha=\frac{2}{3}\ ,\ \beta=\frac{-1}{3}\ ,\ \gamma=\frac{2}{3}$$

(2.3) ـ المعادلة الناظمية لمستو :

سنوجد معادلة المستوي بدلالة جيوب تمام توجيه الناظم على هذا المستوي وطول العمود النازل من المبدأ o على المستوي •

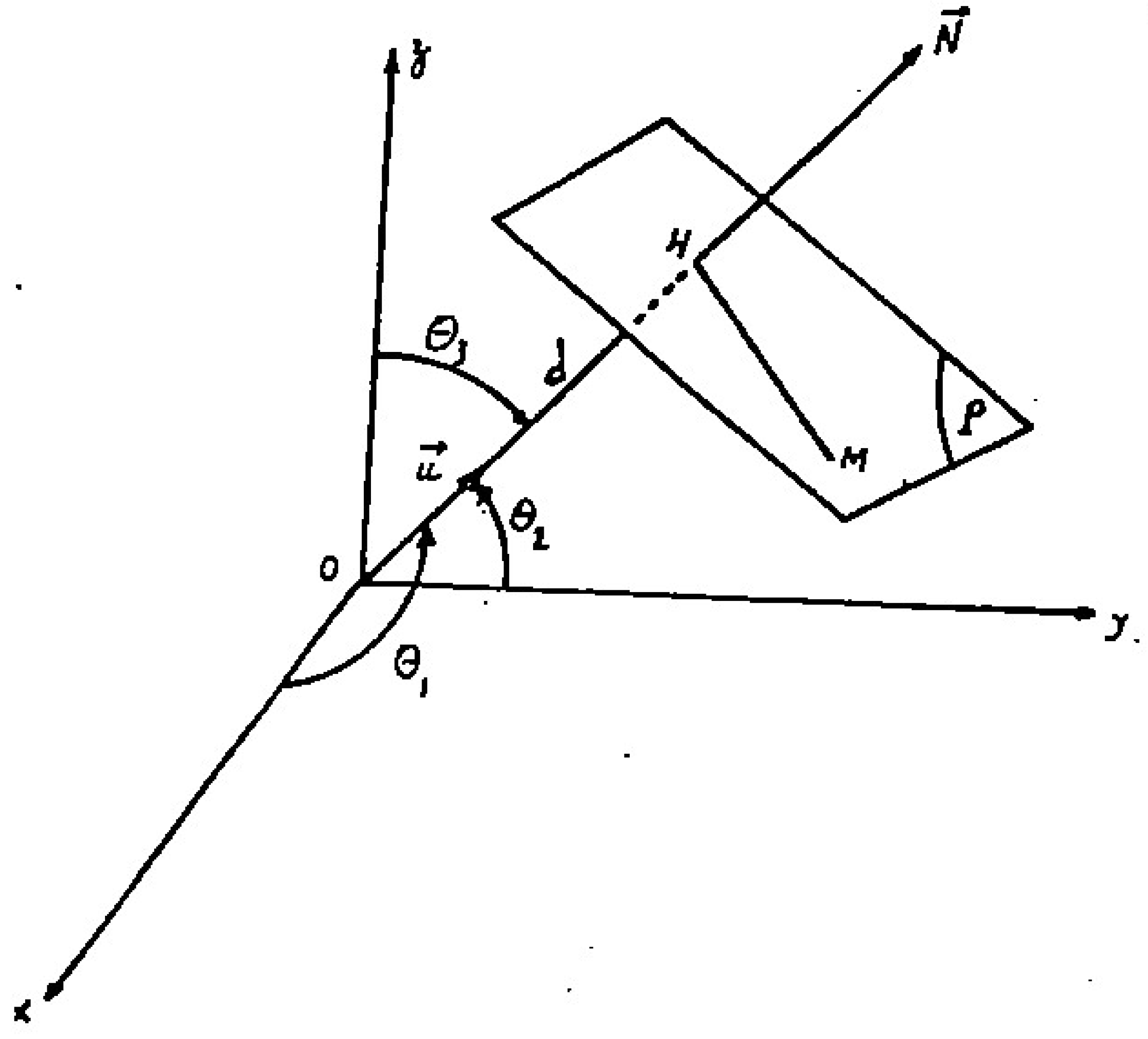
لتكن H المسقط القائم للنقطة o على المستوي المفروض ولنفرض d بعد النقطة o من المستوي •

وليكن $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع الواحدة المحمول على الشعاع الناظم $\overrightarrow{ON}$ الموجه دوما باتجاه $\overrightarrow{OH}$ فتكون احداثيات H هي :

$$x_0=d\cos\theta_1=d\alpha$$

$$y_0=d\cos\theta_2=d\beta$$

$$z_0=d\cos\theta_3=d\gamma$$



شكل (١٦)

ولتكن M(x,y,z) نقطة متحولة في هذا المستوي ،فالمعادلة الشعاعية لهذا المستوي هي :

$$\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

والمعادلة التحليلية لهذا المستوي هي :

$$\alpha (x - d\alpha) + \beta (y - d\beta) + \gamma (z - d\gamma) = o$$

وبعد الاصلاح تكتب بالشكل :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - d (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = o$$

لكن :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

وعندئذ المعادلة السابقة تصبح :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - d = o \qquad (2.3.1)$$

ويمكن ان نجد بسهولة أنه يمكن ارجاع المعادلة العامة للمستوي :

$$px + qy + rz + h = o$$

الى الشكل (2.3.1) وذلك بتقسيم طرفيها على المقدار $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ فنحصل على :

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} x + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} y + \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} z + \frac{h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = o$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \frac{h}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = o$$

لكن في العلاقة (2.1.3) فرضنا أن :

$$h = -(px_o + qy_o + rz_o)$$

$$h = -(\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{OH}) \quad - |\overrightarrow{N}| \, |\overrightarrow{OH}| = - |\overrightarrow{N}| \, d$$

نعوض h بما يساويها في المعادلة الاخيرة فنحصل على :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - d = 0$$

وهذه المعادلة تدعى بالمعادلة الناظمية للمستوي وتكتب

بالشكل :

$$P^{*}(x,y,z) \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z - d = o \qquad (2.3.1)$$

نتيجة :

ان طول العمود النازل من O على المستوي هو :

$$d = \frac{|h|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

مثال(١):

اكتب معادلة المستوي :

$$p(x,y,z) = x + 2y + 2z - 3 = 0$$

بالشكل الناظمي واحسب بعد نقطة الاصل O عن هذا المستوي :

الحل :

نقسم طرفي المعادلة المعطاة على المقدار :

$$|\vec{N}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

فتصبح بالشكل :

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

وهي المعادلة الناظمية للمستوي ، اما بعد O من هذا المستوي فهو $d = 1$.

المثال (٢):

رد المعادلة الآتية الى الشكل الناظمي :

$$x - 2y + 2z + 6 = 0$$

نلاحظ ان الحد الثابت موجب لذلك نقسم طرفي المعادلة على :

$$-\sqrt{1 + 4 + 4} = -3$$

يكون :

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 2 = 0$$

حيث :

$$\alpha = -\frac{1}{3}\ ,\ \beta = \frac{2}{3}\ ,\ \gamma = \frac{-2}{3}\ ,\ d = 2$$

ملاحظة :

ان المعادلة :

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 5 = o$$

ليست بالشكل الناظمي لان الحد الثابت موجب رغم أن :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = 1$$

بينما المعادلة :

$$-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 5 = o$$

هي بالشكل الناظمي :

مثال (٣):

اوجد معادلة المستوي الذي طول العمود النازل عليه من نقطة الاصل يساوي 2 اذا علمت ان وسطاء توجيه الناظم على هذا المستوي هي $\sqrt{3}\ ,\ 2\ ,\ 3$

الحل :

نلاحظ وجود حلين لهذه المسألة ،فالحل الاول يوافق شعاع الواحدة $\vec{u}$ الذي مركباته :

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}\ ,\ \beta = \frac{2}{4}\ ,\ \gamma = \frac{3}{4}$$

وعندئذ تكون معادلة المستوي هي :

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{2}{4}y + \frac{3}{4}z - 2 = o \qquad (1)$$

والحل الثاني يوافق الشعاع $\vec{-u}$ المعاكس للشعاع $\vec{u}$ مباشرة والذي مركباته :

$$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}\ ,\ \beta = \frac{-2}{4}\ ,\ \gamma = \frac{-3}{4}$$

وعندئذ تكون معادلة المستوي هي :

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{2}{4}y - \frac{3}{4}z - 2 = o$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{2}{4}y + \frac{3}{4}z + 2 = o \qquad (2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نلاحظ أن المستويين متوازيان ومتناظران بالنسبة للنقطة 0 وكلاهما يحقق المطلوب •

(2.4) – الزاوية بين مستويين :

ليكن لدينا المستويان المتقاطعان :

$$P_1(x,y,z) \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = o$$

$$P_2(x,y,z) \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = o$$

ان تقاطع هذين المستويين يشكل اربع ثنائيات وكل ثنائيتين متقابلتين بالحرف متساويتين وزاوية القياس لاحدى هذه الثنائيات تساوي الزاوية الكائنة بين ناظميهما بالتعامد •

ان شعاع منحى ناظم المستوي الاول هو : $\vec{N_1}(p_1, q_1, r_1)$

وشعاع منحى ناظم المستوي الثاني هو : $\vec{N_2}(p_2, q_2, r_2)$

فاذا كان θ هي الزاوية الكائنة بين الشعاعين $\vec{N_2}, \vec{N_1}$

يكون :

$$\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = |\vec{N_1}| \cdot |\vec{N_2}| \cdot \cos\theta$$

منه :

$$\cos\theta = \frac{\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}}{|\vec{N_1}| \cdot |\vec{N_2}|}$$

$$\cos\theta = \frac{p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

نلاحظ أن صورة المقدار في الطرف الايمن هي مقدار جبـــــري موجب (عندما θ حادة) ،وسالب (عندما θ منفرجة) ،وبما أننـــا لسنا بصدد تعيين الزاوية بين شعاعين بل نريد تعيين الزاوية بيـن منحيي الشعاعين فقط بغض النظر من اتجاهيهما لذلك نكتفي بتعييـــن الزاوية الحادة الكائنة بين المنحنيين فتأخذ $\cos\theta$ قيمة موجبـــة فقط لذلك نكتب :

$$\cos\theta = \frac{|p_1 p_2 + p_1 q_2 + r_1 r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}} \qquad (2.4.1)$$

وفي حالة تعامد المستويين P_2, P_1 يكون $\vec{N_1} \perp \vec{N_2}$ وهكذا يكافئ

$$\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = 0$$

وبالتالي :

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0 \qquad (2.4.2)$$

وهو شرط تعامد مستويين .

اما في حالة توازي المستويين P_2, P_1 فان $\vec{N_1} // \vec{N_2}$ وهذا يتحقق اذا كان :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \lambda \qquad (2.4.2)$$

ومنه :

$$p_1 = \lambda p_2 \ , \ q_1 = \lambda q_2 \ , \ r_1 = \lambda r_2 \qquad (2.5.3)$$

حيث λ ثابت التناسب .

وينطبق المستويان P_2, P_1 اذا كانا متوازيين ولهما نقطة مشتركة .

ومن شروط التوازي يمكن ان نكتب معادلتي المستويين المتوازيين على الشكل :

$$P_1(x,y,z) \equiv \lambda p_2 x + \lambda q_2 y + \lambda r_2 z + h_1 = 0$$

$$P_2(x,y,z) \equiv p_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2 = 0$$

وبما ان النقطة (x,y,z) مشتركة بين المستويين فاحداثياتها تحقق المعادلتين السابقتين ،فاذا ضربنا طرفي المعادلة ب ($-\lambda$) وجمعناها مع الاولى يكون :

$$\frac{h_1}{h_2} = \lambda \quad \text{ومنه} \quad h_1 - \lambda . h_2 = 0$$

وعندئذ تكون شروط الانطباق :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} \qquad (2.4.4)$$

مثال(١):

عيّن الزاوية الكائنة بين المستويين الآتيين :

$$x + y + 2x - 1 = 0$$

$$y + z + 2 = 0$$

الحـــل :

بتطبيق الدستور(2.4.1) نجد :

$$\cos\theta = \frac{|1 + 2|}{\sqrt{1+1+4}\ \sqrt{1+1}}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

منه :

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

مثال(٢):

اوجد معادلة المستوي الموازي للمستوي :

$$2x - y + 3z + 4 = 0$$

والذي يمر من النقطة $A(1, -2, -1)$.

الحل :

ان وسطاء توجيه ناظم هذا المستوي هي $(2,-1,3)$ ووسطاء توجيه ناظم المستوي الموازي له هـي $(2,-1,3)$ أو ما يتناسب معهـا

عندئذ تكون معادلة المستوي المطلوب :

$$2x - y + 3z + h = 0$$

وبما ان المستوي يمر من $A(1,-2,-1)$ فاحداثياتها تحقق هذه المعادلة أي :

$2 + 2 - 3 + h = 0$ ومنه $h = -1$

والمعادلة المطلوبة هي :

$$2x - y + 3z - 1 = 0$$

مثال (٣) :

برهن أن المستويين :

$$2x + 3y + 4z - 12 = 0$$

$$4x + 6y + 8z - 48 = 0$$

متوازيان ثم احسب البعد بينهما .

الحل :

ان وسطاء توجيه منحى ناظم المستوي الاول هي : $(2,3,4)$

ووسطاء توجيه منحى ناظم المستوي الثاني هي : $(4,6,8)$

وواضح أن هذه الوسطاء متناسبة لان :

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

فالناظمان متوازيان وبالتالي المستويان المفروضان متوازيان .

ولايجاد البعد بين هذين المستويين نحسب بعد كل منهما عن نقطة الاصل O لذلك نرجع الى المعادلة الاولى الى الشكل الناظمي فنحصل على :

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z - \frac{12}{\sqrt{29}} = 0$$

ومن هذه المعادلة نستنتج ان بعد المستوي الاول عن O هو $d_1 = \frac{12}{\sqrt{29}}$ وبالمثل نرجع معادلة المستوي الثاني الى الشكل الناظمي فنحصل على :

$$\frac{4}{2\sqrt{29}}x + \frac{6}{2\sqrt{29}}y + \frac{8}{2\sqrt{29}}z - \frac{48}{2\sqrt{29}} = 0$$

من هذه المعادلة نستنتج ان بعد المستوي الثاني من O هو $d_2 = \frac{24}{\sqrt{29}}$ والبعد بين المستويين هو : $d = d_2 - d_1 = \frac{12}{\sqrt{29}}$

ملاحظة :

اذا توازى مستويان وكانت جيوب تمام توجيه منحى ناظم المستوي الاول تخالف اشارة جيوب تمام توجيه منحى ناظم المستوي الثاني ، فان البعد بين المستويين في هذه الحالة يساوي مجموع طولي العمودين النازلين من نقطة الاصل على هذين المستويين .

(2.5) ـ معادلة مستو يمر من ثلاث نقاط معلومة ليست على استقامة واحدة :

بفرض : $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ $C(x_3,y_3,z_3)$

ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ولنوجد معادلة المستوي P الذي يمر من هذه النقاط الثلاثة .

يمكن رد هذه الحالة الى الحالة (2.1) وذلك باعتبار النقطة المعلومة $A(x_1,y_1,z_1)$ ثم نوجد منحى الناظم على هذا المستوي .

ان منحى الناظم على هذا المستوي يمكن تعيينه بالشعاع :

$$\vec{N} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$$

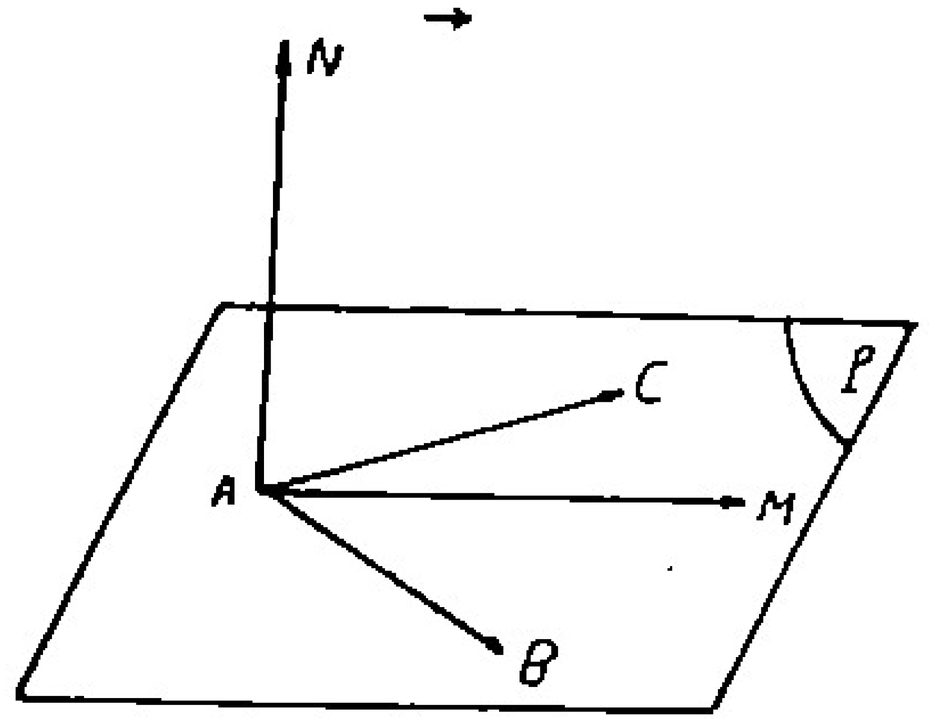
حيث :

$$\vec{AB}\,(x_2 - x_1 \;,\; y_2 - y_1 \;,\; z_2 - z_1)$$

و

$$\vec{AC}\,(x_3 - x_1 \;,\; y_3 - y_1 \;,\; z_3 - z_1)$$

فاذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في هذا المستوي، شكل (١٧).



شكل (١٧)

فان المعادلة الشعاعية لهذا المستوي هي :

$$\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$$

أو :

$$\vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0 \qquad (2.5.1)$$

حيث الطرف الايسر من هذه المعادلة هو الجداء المختلط للاشعة الثلاثة ، فالشعاع $\vec{N} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ يمكن أن نعبر عنه تحليليا بالمعينة التالية :

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

فاذا نشرنا هذه المعينات وفرضنا أن ناتج المعينة الاولى هو العدد الحقيقي p وناتج المعينة الثانية هو العدد الحقيقي q وناتج المعينة الثالثة هو العدد الحقيقي r ،يكون :

$$\vec{N} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

عندئذ الطرف الايسر من المعادلة (2.5.1) يصبح عبارة عن الجداء السلمي للشعاعين :

$$\vec{AM}\,(x - x_1\ ,\ y - y_1\ ,\ z - z_1)\ ,\ \vec{N}(p, q, r)$$

فنكتب

$$\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$$

ونعبر عن هذه المعادلة تحليليا :

$$(x - x_1)p + (y - y_1)q + (z - z_1)r = 0$$

هي معادلة المستوي المطلوب ،ويمكن أن نعبر عنها بالمعينة :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.5.2)$$

نتيجة :

الشرط اللازم والكافي كي تقع النقاط الاربعة :

$$(x_1, y_1, z_1)\ ,\ (x_2, y_2, z_2)\ ,\ (x_3, y_3, z_3)\ ;\ (x_4, y_4, z_4)$$

في مستو واحد هو :

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (1):

اثبت أن النقاط $A(1,2,3), B(2,1,2), C(3,3,1)$ ليست على استقامة واحدة واكتب معادلة المستوي المار بهذه النقاط الثلاثة.

الحـل :

الشعاعان $\overrightarrow{AC}(2,1,-2), \overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$ غير متوازيين بالتالي النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة،فاذا كانت M(x,y,z) نقطة متحولة في المستوي عندئذ تكون المعادلة هي :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

بفك المعينة نجد :

$$x + z - 4 = 0$$

هي معادلة المستوي المطلوب ٠

مثال (٢) :

أوجد معادلة المستوي المار بالنقاط :

$$A(-4,0,6)\ ,\ B(2,3,-4)\ ,\ C(-1,3,2)$$

ثم عيّن جيوب تمام توجيه العمود النازل من نقطة الاصل على هذا المستوي وطول هذا العمود ٠

الحـل :

نطبق المعينة (2.5.2) لايجاد معادلة هذا المستوي :

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-2 \\ 3 & 0 & -6 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

بفك هذه المعينة نجد :

$$6x - 2y + 3z + 6 = 0$$

نرد هذه المعادلة الى الشكل الناظمي بتقسيم طرفيها على :

$$-\sqrt{36+4+9} = -7$$

$$-\frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z - \frac{6}{7} = 0$$

عندئذ :

$$\alpha = -\frac{6}{7}\ ,\ \beta = \frac{2}{7}\ ,\ \gamma = -\frac{3}{7}$$

وطول العمود المطلوب هو : $d = \frac{6}{7}$

(2.6) ـ نقاط تقاطع مستو مع المحاور الاحداثية :

بفرض :

$$px + qy + ry + h = 0$$

معادلة مستو لا يوازي أحد المحاور الاحداثية ،هذا المستوي

يقطع المحور ox عندما y=z=0 ومنه : $x = -\frac{h}{p}$

ويقطع المحور oy عندما x = z = 0 ومنه : $y = -\frac{h}{q}$

ويقطع المحور oz عندما z = y = 0 ومنه :

$$z = -\frac{h}{r}$$

تطبيق :

عيّن نقاط تقاطع المستوي $2x +3y -6z+12 = 0$ مع المحاور الاحداثية :

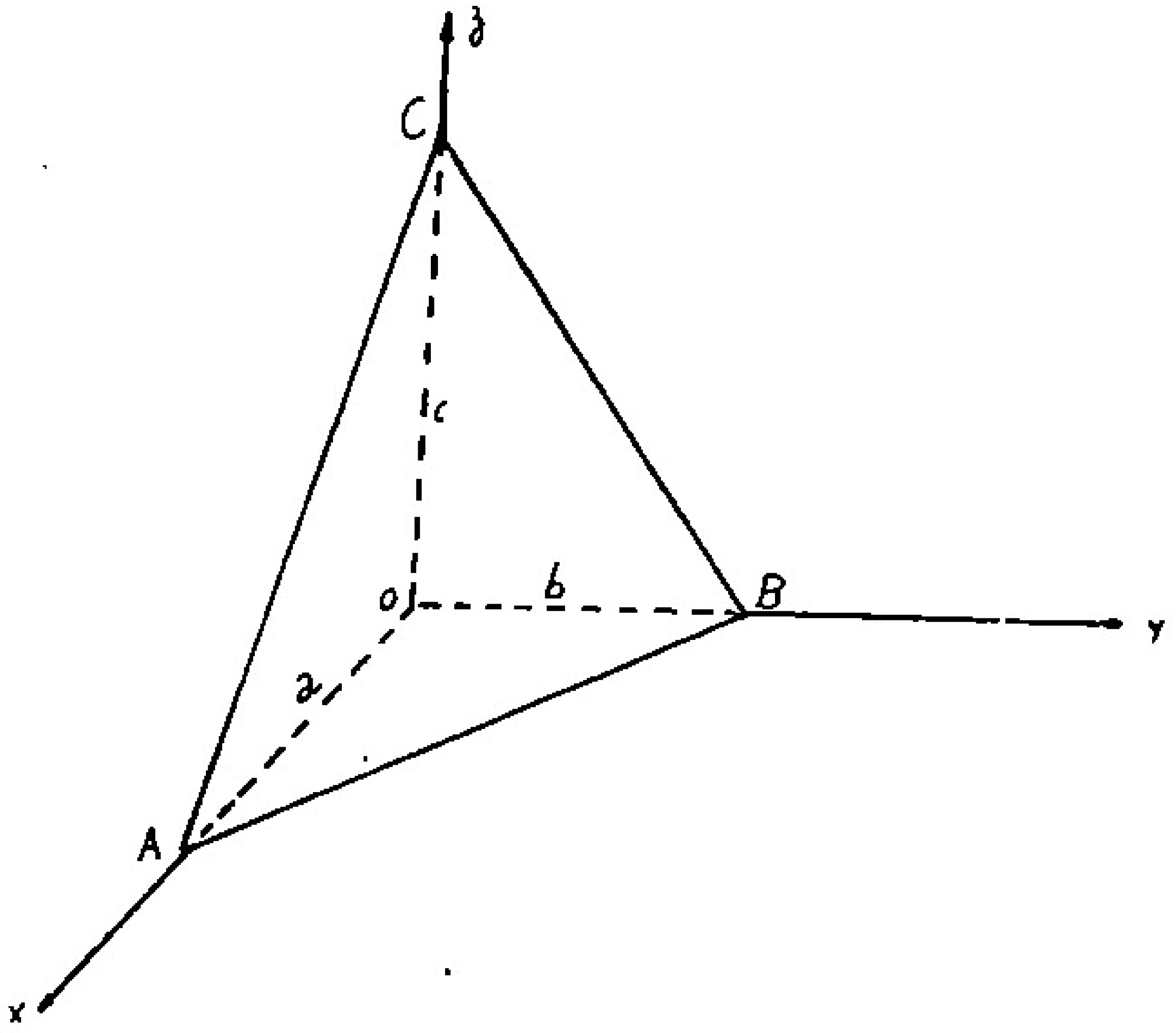
يقطع المستوي المحور ox في النقطة A(-6,0,0) ويقطع المحور oy في النقطة B(0,-4,0) ويقطع المحور oz في النقطـــــة B(0,-4,0) والمحور oz في النقطة C(0,0,2) .

(2.7) ـ معادلة مستو بدلالة الاجزاء المقطوعة من المحاورالاحداثية :

لنفرض أن المستوي P يقطع من المحاور الاجزاء a,b,c, شكل (١٨) فعندئذ تكون نقاط التقاطع مع هذه المحاور هي :

A(a,0,0) , B(0,b,0) , C (0,0,c)

عندئذ ردت المسألة الى ايجاد معادلة مستو يمر من ثــلاث نقاط معلومة وليست على استقامة واحدة. ومعادلةهذا المستوي تعطى بالمعينة الاتية :



شكل (١٨)

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & o \\ -a & o & c \end{vmatrix} = 0$$

بفك العينة نجد :

$$(x- a) bc + y ac + z ab = 0$$

$$x bc + y ac+ z ab = abc$$

وبتقسيم طرفي المعادلة على abc نجد :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2.7.1)$$

مثال(١):

أوجد معادلة مستو يقطع من المحاور الاحداثية الاجزاء :

$a = 2 \quad , \quad b = -4 \quad , \quad c = 5$

الحـــل :

بتطبيق (2.7.1) نجد :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{5} = 1$$

(×20)

$$10x - 5y + 4z - 20 = 0$$

مثال (٢):

اكتب معادلة المستوي الآتي بدلالة الاجزاء المقطوعة مـــن المحاور الاحداثية :

$$3x - 6y + 2z - 12 = 0$$

الحل :

من الفقرة (2.6) نجد :

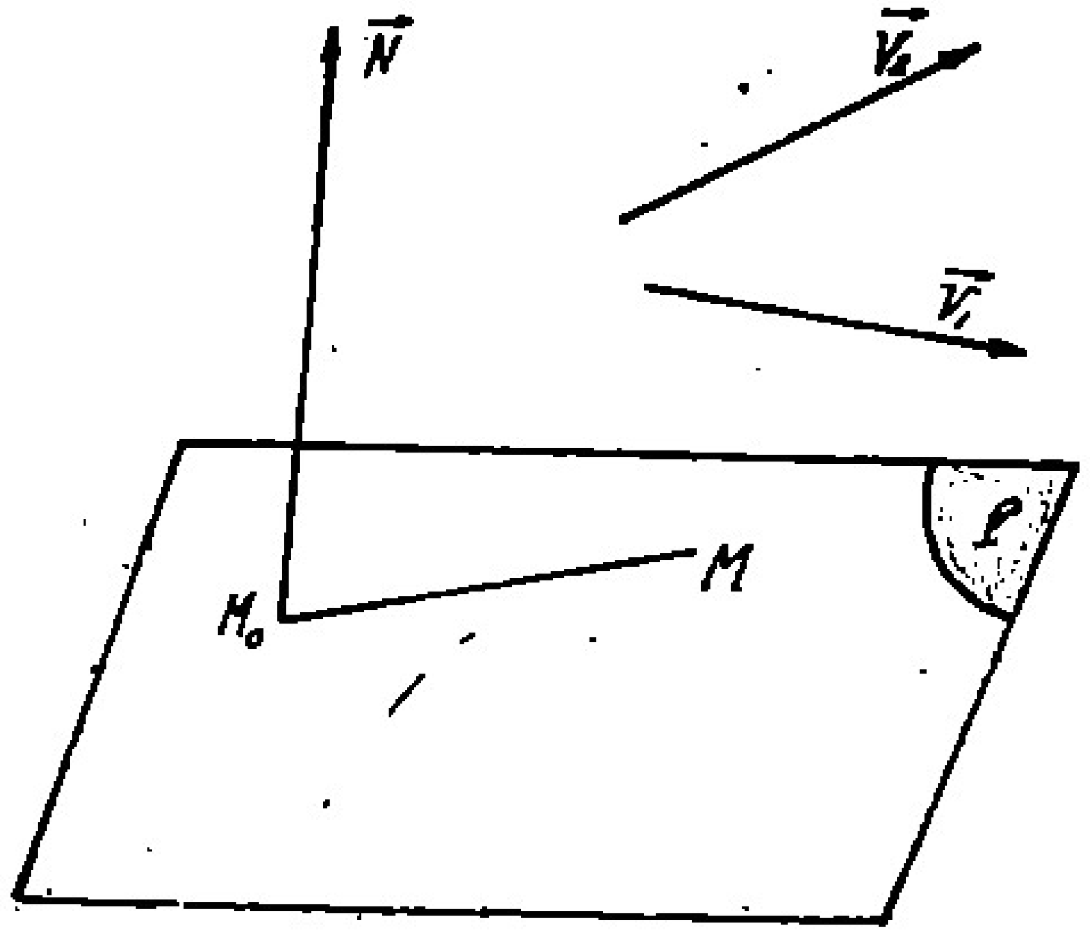
$a = 4 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad c = 6$

والمعادلة هي :

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1$$

(2.8) – معادلة مستو يمر من نقطة معلومة ويوازي منحنيين معلومين:

لتكن النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة معلومة و $\vec{V_1}(p_1,q_1,r_1)$ شعاعا توجيه المنحنيين المعلومين $\vec{V_2}(p_2, q_2, r_2)$ ولنوجد معادلة المستوي المار من M_0 موازيا للمنحنيين السابقين.شكل(١٩)



شكل (١٩)

ان منحى ناظم المستوي المطلوب له نفس منحى الشعاع.

$$\vec{N} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$$

عندئذ ردت المسألة الى الحالة (2.1) وذلك لمعرفة النقطة ومنحى الناظم فاذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في هـــذا المستوي فان :

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N} \iff \overrightarrow{M_0M} \cdot (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) = 0$$

هي المعادلة الشعاعية للمستوي ،والمعادلة التحليلية لهذا المستوي نعبر عنها بالمعينة التالية :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.8.1)$$

مثال (١):

أوجد معادلة مستو يمر من النقطة $A(1,3,2)$ ويوازي الشعاعين $\vec{V_1}(-1,2,3)$, $\vec{V_2}(2,3,-1)$.

نفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في هذا المستوي، عندئذ نطبق المعينة (2.8.1) نجد:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

بفك المعينة والاختصار نجد:

$$11x-5y+7z-10 = 0$$

مثال (٢):

أوجد معادلة مستو يمر من النقطة $A(2,1,0)$ ويعامد المستويين

$$x+2y+z-4 = 0$$

$$3x+y+3z+5 = 0$$

الحل:

ترد هذه المسألة الى سابقتها وذلك لان تعامد المستوي المطلوب مع المستويين المعطيين يكافئ توازيه مع ناظميهما فمعادلته:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

بفك المعينة والاختصار نجد:

$$5x-y-3z-9 = 0$$

مثال(٣):

أوجد معادلة مستو يمر من النقطتين $A(1,2,3)$ و $B(2,1,1)$ ويعامد المستوي

$$3x + 4y + z - 6 = 0$$

الحل:

نوجد منحى الشعاع $\vec{AB}$ فيكون $\vec{AB}(1,-1,-2)$ ونوجد منحى الشعاع الناظم على المستوي المفروض فيكون $\vec{N}(3,4,1)$ والمستوي المطلوب يوازي منحيي الشعاعين $\vec{N}$, $\vec{AB}$ وبذلك ترد هذه المسألة الى ايجاد معادلة مستو يمر من النقطة A (أو B) ويوازي منحيين ومعادلته:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

بفك المعينة والاختصار نجد:

$$x-y+z-2 = 0$$

ملاحظة:

المسألة السابقة تصبح في حالة عدم تعيين اذا كان الشعاع $\vec{AB}$ يعامد المستوي المفروض.

(2.9) – اشارة المقدار px+qy+rz+h

لنعتبر المستوي P المعين بالمعادلة :

$$P(x,y,z) \equiv px + qy + rz + h = 0$$

فهذا المستوي يقسم الفراغ الى منطقتين (من خواص المستوي)

ولتكن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين من الفراغ غير واقعتين عليه ولنفرض ان المستقيم M_1M_2 أو امتداده يلاقي المستوي في النقطة M التي تقسم M_1M_2 بالنسبة K .

فاحداثيات النقطة M القاسمة M_1M_2 بالنسبة K هي :

$$x = \frac{x_1 + Kx_2}{1 + K} \quad , \quad y = \frac{y_1 + K y_2}{1 + K} \quad , \quad z = \frac{z_1 + K z_2}{1 + K}$$

وبما أن النقطة M تقع في المستوي P فاحداثياتها تحقق معادلته آي :

$$p\left(\frac{x_1 + K x_2}{1 + K}\right) + q\left(\frac{y_1 + K y_2}{1 + K}\right) + r\left(\frac{z_1 + K z_2}{1 + K}\right) + h = 0$$

$$p(x_1 + K x_2) + q(y_1 + K y_2) + r(z_1 + K z_2) + h(1 + K) = 0$$

$$(px_1 + qy_1 + rz_1 + h) + K(px_2 + qy_2 + rz_2 + h) = 0$$

ومنه :

$$K = -\frac{px_1 + qy_1 + rz_1 + h}{px_2 + qy_2 + rz_2 + h} \qquad (2.9.1)$$

فاذا كانت النقطتان M_1 و M_2 في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوي P فان K تكون موجبة.(قاسمة داخلا) وهذا يقضي أن يكون المقداران :

$$(p_2x+q_2y+r_2z+h) \quad , \quad (px_1+qy_1+rz_1+h)$$

من اشارتين مختلفتين . اما اذا كانت النقطتان M_1 و M_2 في جهة واحدة بالنسبة للمستوي P فان K تكون سالبة (M قاسمة خارجا) وعندئذ يكون المقداران السابقان من اشارة واحدة.

مما سبق يمكن أن نستنتج ما يلي :

ان اشارة المقدار $px+ qy +rz + h$ تكون موجبة من أجل جميع النقاط التي تقع في أحد جانبي المستوي :

$$px + qy + rz + h = 0$$

وتكون سالبة من اجل جميع النقاط التي تقع في الجانب الاخر بالنسبة لهذا المستوي ويكون المقدار صفرا من أجل جميع النقاط الواقعة على هذا المستوي . فاذا كان الثابت h موجبا فان نقطة الاصل تقع في الجانب الموجب بالنسبة لهذا المستوي .

وقد اصطلح ان يسمى المقدار $P(x,y,z)=px+qy+ rz + h$ بالقوة التحليلية للنقطة $M(x,y,z)$.

فالقوة التحليلية للنقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ هو العدد الحقيقي $P(x_1,y_1,z_1)$ لذلك يمكن ان نقول أن النقاط التي قوتها التحليلية من اشارة واحدة تقع في جانب واحد من المستوي،كما يمكن أن نقول : ان المستوي هو المحل الهندسي لنقاط الفراغ التي قوتها

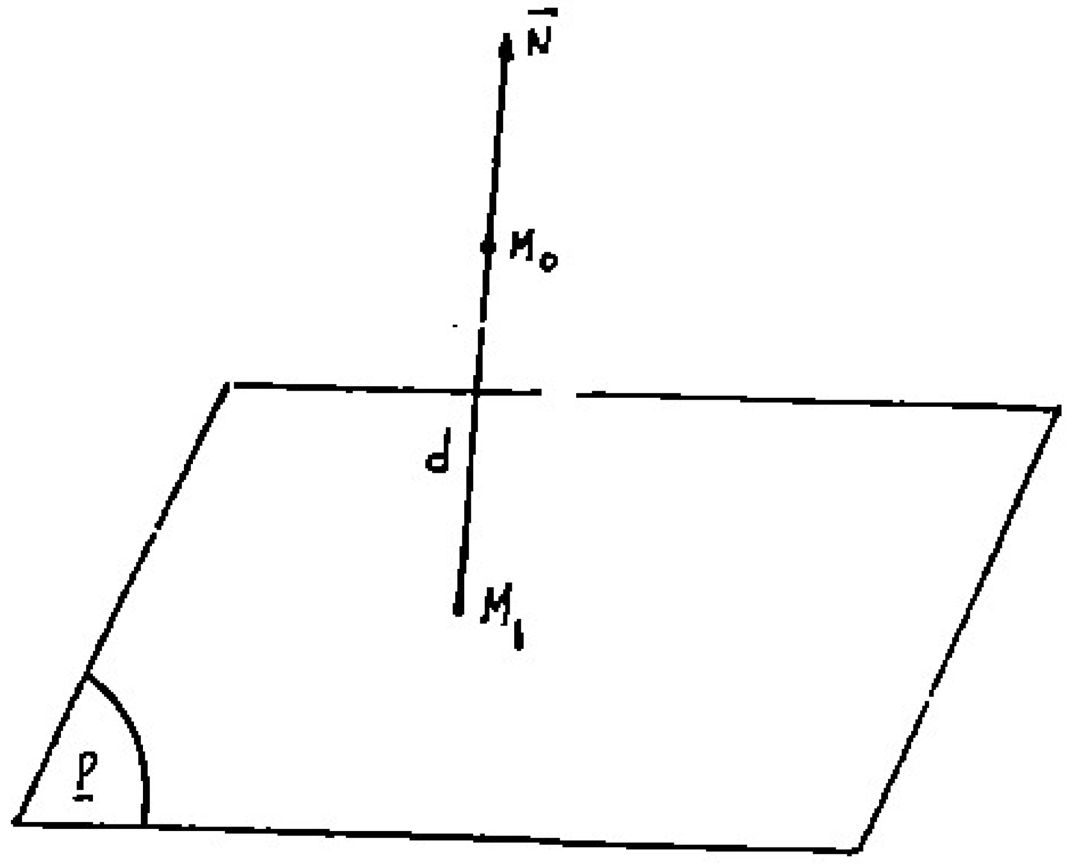
التحليلية معدومة بالنسبة له .

(2.10) ـ بعد نقطة معلومة عن مستو معلوم :

ليكن لدينا المستوي P المعين بالمعادلة :

$$P(x,y,z) \equiv px + qy + rz + h = 0$$

و $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة معلومة لا تقع في هذا المستوي ،ولنوجد بعد هذه النقطة عن المستوي .



شكل (٢٠)

لتكن M_1 المسقط القائم للنقطة M_0 على المستوي ولنفرض δ القياس الجبري للشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ المحمول على $\vec{N}$ ،ولنعتبر الجداء الداخلي :

$$\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{N} = \delta\cdot|\vec{N}|$$

حيث $\delta>0$ عندما تقع M_0 في الاتجاه الموجب للناظم $\vec{N}$ بالنسبة للمستوي و $\delta<0$ عندما تقع M_0 في الاتجاه السالب

للناظم $\vec{N}$ بالنسبة للمستوي .

من العلاقة السابقة نجد :

$$\delta = \frac{\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

$$\delta = \frac{p(x_0-x_1)+q(y_0-y_1)+r(z_0-z_1)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\delta = \frac{px_0+qy_0+rz_0-(px_1+qy_1+rz_1)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

بما أن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ تنتمي للمستوي p فاحداثياتها تحقق معادلته أي :

$$px_1+qy_1+rz_1+h=0$$

ومنه نجد :

$$h=-(px_1+qy_1+rz_1)$$

نعوض في العلاقة الاخيرة فنجد :

$$\delta = \frac{px_0+qy_0+rz_0+h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

لكن الصورة ليست الا القوة التحليلية للنقطة M_0 بالنسبة للمستوي P ،فنكتب :

$$\delta = \frac{P(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \qquad (2.10.2)$$

أما اذا اردنا حساب البعد الهندسي للنقطة M_0 عن المستوي

P بغض النظر عن وضعها بالنسبة له فناخذ δ بالقيمة المطلقة فنجد

$$d = |\delta| = \frac{|P(x_0, y_0, z_0)|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \qquad (2.10.3)$$

أما اذا كان المستوي P معينا بالمعادلة الناظمية (2.3.1)

$$P^*(x,y,z) \equiv \alpha x + \beta x + \gamma z - d = 0$$

عندئذ دستور البعد عن المستوي يصبح بالشكل :

$$|\delta| = |P^*(x_0, y_0, z_0)|$$

$$|\delta| = |\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 - d| \qquad (2.10.4)$$

حيث d في هذا الدستور هو بعد نقطة الاصل عن المستوي كما فرضنا في الفقرة (2.3) .

مثال (1) :

احسب بعد النقطة A (3,9,1) عن المستوي :

$$x - 2y + 2z - 3 = 0$$

الحل :

بتطبيق الدستور السابق نجد :

$$\delta = \frac{3 - 18 + 2 - 3}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3} .$$

$$d = |\delta| = 5\frac{1}{3}$$

فلو حسبنا بعد نقطة الاصل عن هذا المستوي لوجدنا :

$$\delta = \frac{-3}{3} = -1 \quad , \quad d = 1$$

ونلاحظ ان البعد الجبري للنقطة A عن المستوي هو سالب من نفس اشارة البعد الجبري لنقطة الاصل عن هذا المستوي مما يوضح لنا ان النقطة A تقع في جهة واحدة مع نقطة الاصل بالنسبة للمستوي.

مثال (٢) :

احسب بعد كل من النقطتين A(2,1,-2) , B (1,-6,1) عن المستوي :

$$4y - y + 8z - 9 = 0$$

وعيّن موقع كل منهما بالنسبة لهذا المستوي .

الحل :

بعد النقطة A عن المستوي هو :

$$\delta_1 = \frac{8 - 1 - 16 - 9}{\sqrt{16 + 1 + 64}} = -2 \qquad (1)$$

بعد النقطة B عن المستوي هو :

$$\delta_2 = \frac{4 + 6 + 8 - 9}{\sqrt{16 + 1 + 64}} = +1 \qquad (2)$$

من النتيجتين (1) و(2) نستنتج ان النقطتين تقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوي .

فاذا حسبنا بعد نقطة الاصل عن هذا المستوي نجد :

$$\delta_o = \frac{-9}{9} = -1$$

فالنقطة A تقع مع النقطة O في الجهة السالبة والنقطة B تقع في الجهة الموجبة بالنسبة لهذا المستوي .

مثال (٣) :

أوجد البعد بين المستويين المتوازيين :

$$2x - y - 2z + 7 = 0$$

$$2x-y-2x-5=0$$

طريقة أولى :

نحسب بعد نقطة الاصل عن المستوي الاول فنجد :

$$\delta_1 = \frac{7}{3}$$

ونحسب بعد نقطة الاصل عن المستوي الثاني فنجد

$$\delta_2 = -\frac{5}{3}$$

فالمستويان يقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة لنقطة الاصل

والبعد بين المستويين :

$$d = |\delta_1| + |\delta_2| = 4$$

طريقة ثانية :

نختار نقطة ما من المستوي الثاني ولتكن A(0,-5,0)

ونحسب بعدها عن المستوي الاول :

$$\delta = \frac{5+7}{3} = 4$$

(2.11) ـ معادلة المستوي المنصف لزاوية مستويين معلومين :

ليكن لدينا المستويان :

$$P_1(x,y,z) \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0$$

$$P_2(x,y,z) \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0$$

ان المستوي المنصف داخلا أو خارجا لاحدى الزوايا الثنائية الحادثة من تقاطع هذين المستويين هو المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن هذين المستويين .

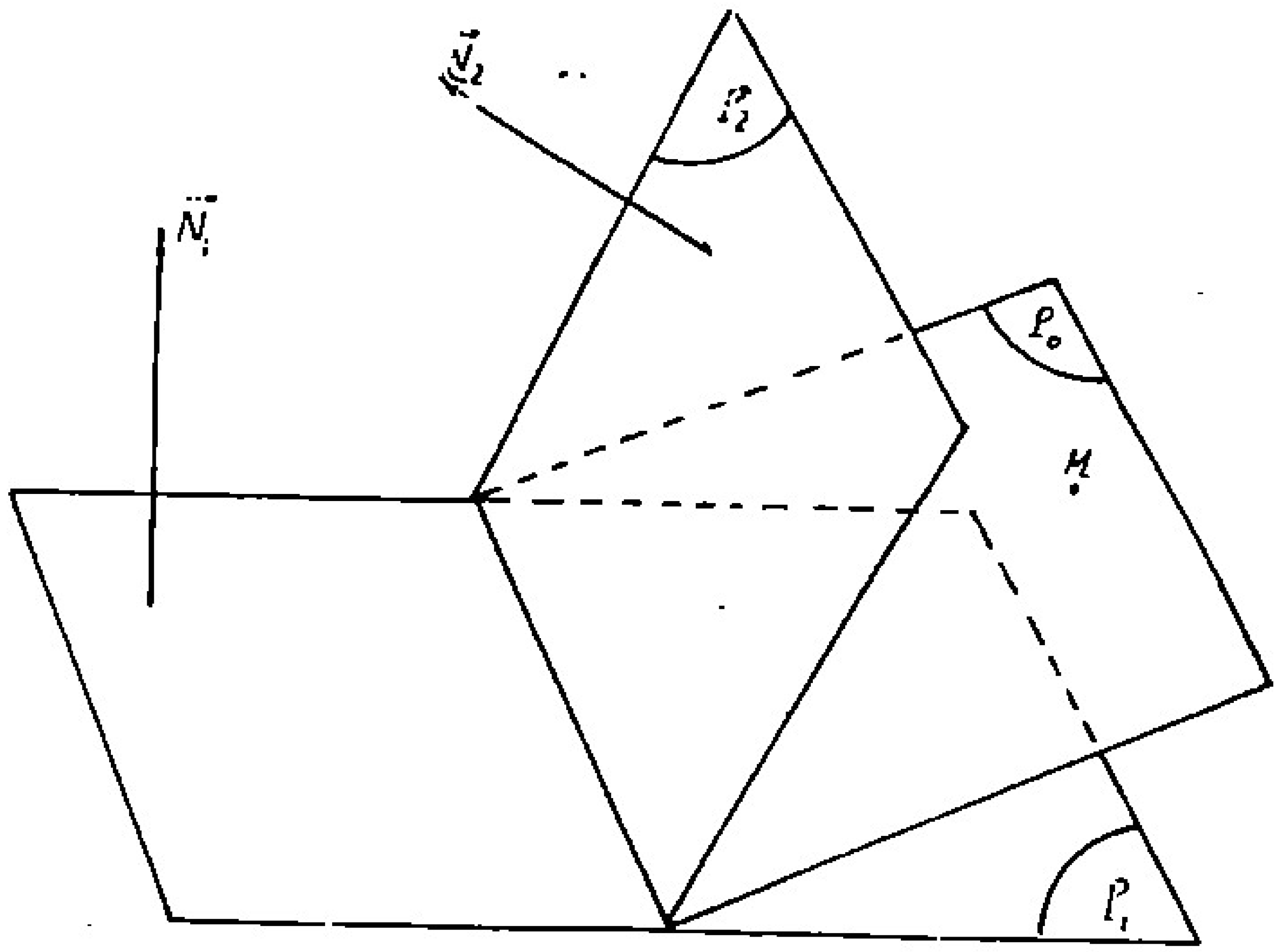
نصطلح عادة ان نسمي المستوي المنصف للزاوية الثنائية الحادة بالمستوي المنصف الداخلي والمستوي المنصف للثنائية المجاورة لها (المنفرجة) بالمستوي المنصف الخارجي .

فاذا كانت M(x,y,z) نقطة تنتمي الى احد المستويين المنصفين فان بعدها عن المستوي الاول يساوي بعدها عن المستوي الثاني فنكتب :

$$\frac{|p_1(x,y,z)|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}} = \frac{|p_2(x,y,z)|}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

أو :

$$\frac{p_1(x,y,z)}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}} = \pm \frac{p_2(x,y,z)}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}} \qquad (2.11.1)$$



شكل (٢١)

فاذا اعتبرنا الاشارة الموجبة للطرف الثاني نحصل على معادلة احد المنصفين ، واذا اعتبرنا الاشارة السالبة للطرف الثاني نحصل على معادلة المنصف الاخر ، فالمعادلة (2.11.1) تعطي معادلتي المستويين المنصفين معا .

ولتعيين الاشارة الموافقة للمستوي المنصف الداخلي نميز حالتين :

الحالة الاولى :

اذا كانت الزاوية $(\vec{N_1}, \vec{N_2})$ حادة أي $\vec{N} . \vec{N} > 0$ شكل (٢١) فان النقاط الواقعة على المستوي المنصف الخارجي (منصف الزاوية المنفرجة) تكون ابعادها عن المستويين موجبة وعندئذ الاشارة (+) توافق المستوي المنصف الخارجي والاشارة (−) توافق المستوي

المنصف الداخلي أي ان الاشارة الموافقة للمستوي المنصف الداخلي تخالف اشارة الجداء $\vec{N_1}, \vec{N_2}$.

الحالة الثانية :

اذا كانت $(\vec{N_1}.\vec{N_2})$ منفرجة أي $\vec{N_1} . \vec{N_2} < 0$ (أي $\vec{N_2}$ موجة في الاتجاه المعاكس للاتجاه المبين في الشكل ٢١).

عندئذ النقاط الواقعة على المستوي المنصف الداخلي (منصف الزاوية الحادة) تكون أبعادها موجبة على المستويين وعندئذ الاشارة (+) توافق المستوي المنصف الداخلي وهي الاشارة المخالفة لاشارة الجداء $\vec{N_1} . \vec{N_2}$ والاشارة (−) توافق المستوي المنصف الخارجي .

ونستنتج مما سبق ان الاشارة الموافقة للمستوي المنصف الداخلي هي الاشارة المخالفة لاشارة الجداء $\vec{N_1}.\vec{N_2}$ فاذا رمزنا لاشارة هذا الجداء بالرمز ε تكون معادلة المستوي المنصف الداخلي :

$$\frac{P_1(x,y,z)}{|\vec{N_1}|} = -\varepsilon \frac{P_2(x,y,z)}{|\vec{N_2}|} \qquad (2.11.2)$$

وعندئذ الاشارة ε توافق المستوي المنصف الخارجي .

أما اذا كان الجداء $\vec{N_1}, \vec{N_2}$ معدوما فالمستويان متعامدان ولا يمكن التمييز بين المستويين المنصفين .

مثال :

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1(x,y,z) \equiv 2x + 2y - z + 1 = 0$$

$$P_2(x,y,z) \equiv -x - 2y + 2z + 3 = 0$$

الحـل :

ان معادلتي هذين المنصفين هما :

$$\frac{2x + 2y - z + 1}{3} = \pm \frac{-x - 2y + 2z + 3}{3}$$

أي :

$$2x + 2y - z + 1 = \pm(-x - 2y + 2z + 3)$$

بأخذ الاشارة (+) نحصل على المعادلة :

$$3x + 4y - 3z - 2 = 0 \qquad (1)$$

وبأخذ الاشارة (−) نحصل على المعادلة :

$$x + z + 4 = 0 \qquad (2)$$

المعادلتان (1) و (2) هما معادلتا المستويين المنصفين ولمعرفة المستوي المنصف الداخلي نوجد اشارة الجداء $\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}$ فيكون

$$-2 - 4 - 2 = -8 < 0$$

اذن الاشارة ع هي (−) وعندئذ الاشارة (+) توافق المستوي المنصف الداخلي وهي المعادلة (1)، والاشارة (−) توافق المستوي المنصف الخارجي وهي المعادلة (2) .

(2.12) ـ حزمة المستويات المارة من مستقيم ما :

بفرض P_1, P_2 مستويان متقاطعان بالفصل المشترك D فمجموعة المستويات التي تقبل D فصلا مشتركا لها تدعى حزمة المستويات والمستويان P_1, P_2 يسميان بقاعدة الحزمة .

ولنفرض أن المستويين P_1, P_2 معينان بالمعادلتين :

$$P_1(x,y,z) \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0 \qquad (1)$$

$$P_2(x,y,z) \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0 \qquad (2)$$

فالشكل العام لمعادلة أي مستو يمر بالفصل المشترك للمستويين السابقين هو :

$$p_1x + q_1y + r_1z + h_1 + \lambda(p_2x + q_2y + r_2z + h_2) = 0 \qquad (2.12.1)$$

حيث λ وسيط متحول .

وذلك لان المعادلة (2.12.1) خطية في المتحولات x, y, z، وتكتب بالشكل :

$$(p_1 + \lambda p_2)x + (q_1 + \lambda q_2)y + (r_1 + \lambda r_2)z + h_1 + \lambda h_2 = 0$$

فهي تمثل مستويا ،كما أن احداثيات أي نقطة تقع على الفصل المشترك للمستويين (1) و (2) تحقق معادلتيهما معا وتحقق أيضا المعادلة (2.12.1) . وبالتالي فالمعادلة (2.12.1) تمثل مستويا يمر بالفصل المشترك D لمستويي القاعدة فكل قيمة عددية للوسيط

λ تعطي مستويا من مستويات الحزمة. ويمكن أن نعبر عن معادلة حزمة المستويات بالمعادلة التالية :

$$P(\lambda) \equiv p_1 + \lambda P_2 = 0 \qquad (2.12.2)$$

والآن لنبرهن على العكس ، اي سنبرهن ان كل مستو P من حزمة المستويات المعينة بالمستويين P_2,P_1 تكون معادلته من الشكل (2.12.2) .

لنأخذ مستويا P من الحزمة معادلته :

$$P(x,y,z) \equiv px + qy + rz + h = 0$$

بما ان P_2,P_1, P تشترك بفصل مشترك واحد فان نواظم هذه المستويات $\vec{N}_2,\vec{N}_1, \vec{N}$ تقع في مستو واحد لانها تعامد الفصل المشترك وبالتالي يمكن ان نكتب :

$$\vec{N} = \lambda_1\vec{N}_1 + \lambda_2\vec{N}_2 \qquad (2.12.3)$$

ومنها نستطيع أن نكتب :

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \ , \quad q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \ , \quad r = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$$

حيث λ_2,λ_1 كميتان سلميتان ،وبالتالي فان معادلة المستوي تصبح :

$$P \equiv \lambda_1 (p_1x + q_1y + r_1z) + \lambda_2 (p_2x + q_2z + r_2z) + h = 0 \qquad (2.12.4)$$

فاذا اخذنا نقطة ما مثل $M_0(x_0,y_0,z_0)$ من الفصل المشترك فهذه النقطة تحقق احداثياتها معادلات المستويات P_2, P_1, P في آن واحد وعندئذ من المعادلة (2.12.4) نجد :

$$h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$$

وعندئذ نكتب معادلة P بالشكل :

$$P \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$$

اذا فرضنا $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ $(\lambda_1 \neq 0)$ نجد ان معادلة المستوي P تكتب بالشكل :

$$P \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$

وهو المطلوب .

مثال (١) :

لدينا المستويان المتقاطعان :

$$P_1 \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0$$
$$P_2 \equiv x - 2y - 4z + 9 = 0$$

اوجد معادلة مستو يمر من الفصل المشترك لهذين المستويين ويمر من النقطة (-1,1,2) .

الحل :

ان المستوي المطلوب هو احد مستويات الحزمة التي قاعدتها المستويان P_2, P_1 فمعادلة حزمة المستويات هي :

$$P(\lambda) \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$
$$P(\lambda) \equiv 2x + 3y - z - 5 + \lambda(x - 2y - 4z + 9) = 0$$
$$P(\lambda) \equiv (2 + \lambda)x + (3 - 2\lambda)y + (-1 - 4\lambda)z - 5 + 9\lambda = 0$$

ولنعين λ بحيث يمر المستوي $p(\lambda)$ من النقطة $(-1,1,2)$ فنجد

$$(2+\lambda)(-1)+(3-2\lambda)(1)+(-1-4\lambda)(2)-5+9\lambda=0$$

بحل هذه المعادلة نجد :

$$\lambda=-3$$

نعوض λ بقيمتها في معادلة الحزمة فنجد :

$$P(-3)\equiv -x++3y+11z-32=0$$

مثال (٢)

لدينا المستويان المتقاطعان :

$$P_1\equiv x+y+1=0$$
$$P_2\equiv x-2y+z+1=0$$

عيّن مستويا يمر من الفصل المشترك لهما ويتعامد مـــــع المستوي P_1 .

الحل :

ان معادلة حزمة المستويات التي قاعدتها P_2,P_1 هي :

$$P(\lambda)\equiv(1+\lambda)x+(1-2\lambda)y+\lambda z+1+\lambda=0$$

فناظم اي مستو من هذه الحزمة معين بالشعاع .

$$\vec{N}(\lambda)=(1+\lambda\ ,\ 1-2\lambda\ ,\ \lambda)$$

وناظم المستوي P_1 معين بالشعاع $\vec{N_1}(1,1,0)$.

وشرط تعامد مستو من الحزمة $P(\lambda)$ مع المستوي P_1 هو :

$$\vec{N}(\lambda)\cdot\vec{N_1}=0$$

أي :

$$(1+\lambda)+(1-2\lambda)=0$$
$$-\lambda+2=0$$

ومنه :

$$\lambda=2$$

والمستوي المطلوب هو :

$$P(2)\equiv 3x-3y+2z+3=0$$

(2.13) – شروط تقاطع ثلاث مستويات في خط مستقيم واحد :

بفرض P_1,P_2,P_3 ثلاثة مستويات معادلاتها :

$$P_1(x,y,z)\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0 \qquad (1)$$
$$P_2(x,y,z)\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0 \qquad (2)$$
$$P_3(x,y,z)\equiv p_3x+q_3y+r_3z+h_3=0 \qquad (3)$$

ان معادلة اي مستو يمر بخط تقاطع المستويين (1) ، (2) هي :

$$p_1x+q_1y+r_1z+h_1+\lambda(p_2x+q_2y+r_2z+h_2)=0$$

أي :

$$(p_1+\lambda p_2)x+(q_1+\lambda q_2)y+(r_1+\lambda r_2)z+h_1+\lambda h_2=0 \qquad (4)$$

فاذا كان المستوي المعين بالمعادلة (3) يمر بخط تقاطـع المستويين (1) ، (2) فانه باختيار مناسب للوسيط λ يجـــب أن تمثل المعادلتان (3) ، (4) نفس المستوي ، وفي هذه الحالـــة

يجب ان تتناسب الامثال المتناظرة في المعادلتين .

$$\frac{p_1 + \lambda p_2}{p_2} = \frac{q_1 + \lambda q_2}{q_2} = \frac{r_1 + \lambda r_2}{r_2} = \frac{h_1 + \lambda h_2}{h_2}$$

وهذه النسب المتساوية تمثل ثلاث معادلات خطية مختلفة في المجهول λ . واحدى هذه المعادلات الثلاثة تكفي لتعيين قيمة λ وهذه القيمة يجب أن تحقق المعادلتين الباقيتين حتى تتلاقى المستويات الثلاثة في خط مستقيم واحد .

●●●●●●

تمارين (٢)

١- أوجد طول وجيوب تمام توجيه العمود النازل من نقطة الاصل على المستوي :

$$3x - 2y + 5z - 4 = 0$$

ثم أوجد ايضا الاجزاء المقطوعة بهذا المستوي من المحاور الاحداثية .

٢- مستوي يمر من النقاط (2,13,),(1,-2,3),(2,-4,-7) أوجد معادلة هذا المستوي ثم احسب طول وجيوب تمام توجيه العمود النازل من نقطة الاصل على هذا المستوي .

٣- اوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقطة A(2,3,-1) موازيا للمستوي $3x-4y+7z = 0$ ، ثم أوجد معادلة المستوي الذي يمر من A ويعامد المستقيم OA حيث O هي نقطة الاصل .

٤- مستقيم يمر من النقطة A(4,-2,3) ويعامد مستويا P ويقطعه في النقطة B(5,-1,7) اوجد معادلة هذا المستوي .

٥- اوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقطتين A (2,1,-2) B(3,-1,1) ويوازي المستقيم الواصل بين النقطتين D(-2,-4,3),C(-2,-3,0) .

٦- أوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقاط :

$C(-2,2,-1)$, $B(1,2,1)$, $A(1,1,0)$

واثبت ان المستقيم الواصل بين النقطتين $(1-4,8)$, $(5,2,2)$ عمودي على هذا المستوي •

٧- اثبت أن النقاط $A(0,2,-4)$, $B(-1,1,-2)$, $C(-2,5,3)$, $D(-3,-1,2)$ تقع في مستو واحد ثم أوجد معادلة هذا المستوي •

٨- اوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقطة $(6,5,-2)$ ويوازي المستوي $3x-4y+12z-13=0$ ثم أوجد البعد بين المستويين •

٩- اوجد طول كل من العمودين النازلين من النقطتين $A(1,4,-1)$, $B(-1,0,5)$ على المستوي $2x-y+2x-5=0$ وعيّن موقع النقطتين بالنسبة الى جهتي المستوي •

١٠- اوجد معادلتي المستويين اللذين ينصفان الزاوية الكائنة بين المستويين :

$3x-4y+5z-3=0$

$5x+3y-4z-9=0$

ثم عيّن المستوي المنصف الداخلي منهما •

١١- اوجد معادلة المستوي الذي يمر بخط تقاطع المستويين :

$2x+3y+4z-5=0$, $x+y+z-1=0$

ويعامد المستوي $x-y+z=0$

١٢- اثبت ان المستويات الثلاثة :

$8x+9y-3z-31=0$, $2x-5y+11z-33=0$

$14x+23y-17z-29=0$ تتلاقى في خط مستقيم واحد.

١٣- اثبت أن المستويات الاربعة :

$x+y-3z-4=0$, $2x-3y+2z=0$

$7x-5y+6z-1=0$, $3x-y+z-2=0$

تتلاقى في نقطة واحدة يطلب تعيينها •

١٤- اوجد معادلة المستوي العمودي على المستوي :

$3x-4y+9=0$

والذي يمر بخط تقاطعه مع المستوي :

$7x-y-12z+16=0$

واثبت ان البعد بين النقطة $(3,2,1)$ وخط تقاطع المستويين يساوي $\sqrt{5}$ •

١٥- عيّن احداثيات مركز الكرة التي تمس من الداخل أوجه رباعي الوجوه الذي وجوهه المستويات الاتية :

$x+y+z-1=0$, $z=0$, $y=0$, $x=0$

١٦- أوجد معادلة المستوي الموازي للمستوي :

$3x-3z-6z-14=0$

والذي يبعد 5 عن نقطة الاصل •

١٧- اوجد معادلة المستوي المار من النقطة $A(2,1,3)$ والذي يعامد المستويين :

$$2x + z - 1 = 0 \ , \ x-y+2z-3 = 0$$

١٨- عيّن الوسيط λ كي يتعامد المستويان :

$$2\lambda x + y - z - 2 = 0$$
$$x - \lambda y - z + 3 = 0$$

ثم احسب بعد النقطة $A(1,1,1)$ عن الفصل المشترك لهما.

١٩- اوجد معادلة مستو يمر من النقطتين $A(2,3,-4)$, $B(4,-2,0)$ والذي يبعد 2 عن المبدأ .

٢٠- اوجد معادلة المستوي المار بالفصل المشترك للمستويين $2x - y + 5 = 0 \ , \ x + y + 2 = 0$ والذي يعامد المستوي $x + y + z - 1 = 0$.

الفصل الثالث

المستقيم في الفراغ

تمهيد :

يتعين المستقيم في الفراغ بنقطة معلومة ومنحى معلوم أو بنقطتين معلومتين كما يتعين أيضا بتقاطع مستويين .

سنوجد في هذا البحث معادلات المستقيم بحالاته المختلفة.

(3.1) - معادلة مستقيم يمر بنقطة معلومة ويوازي شعاعا معلوما:

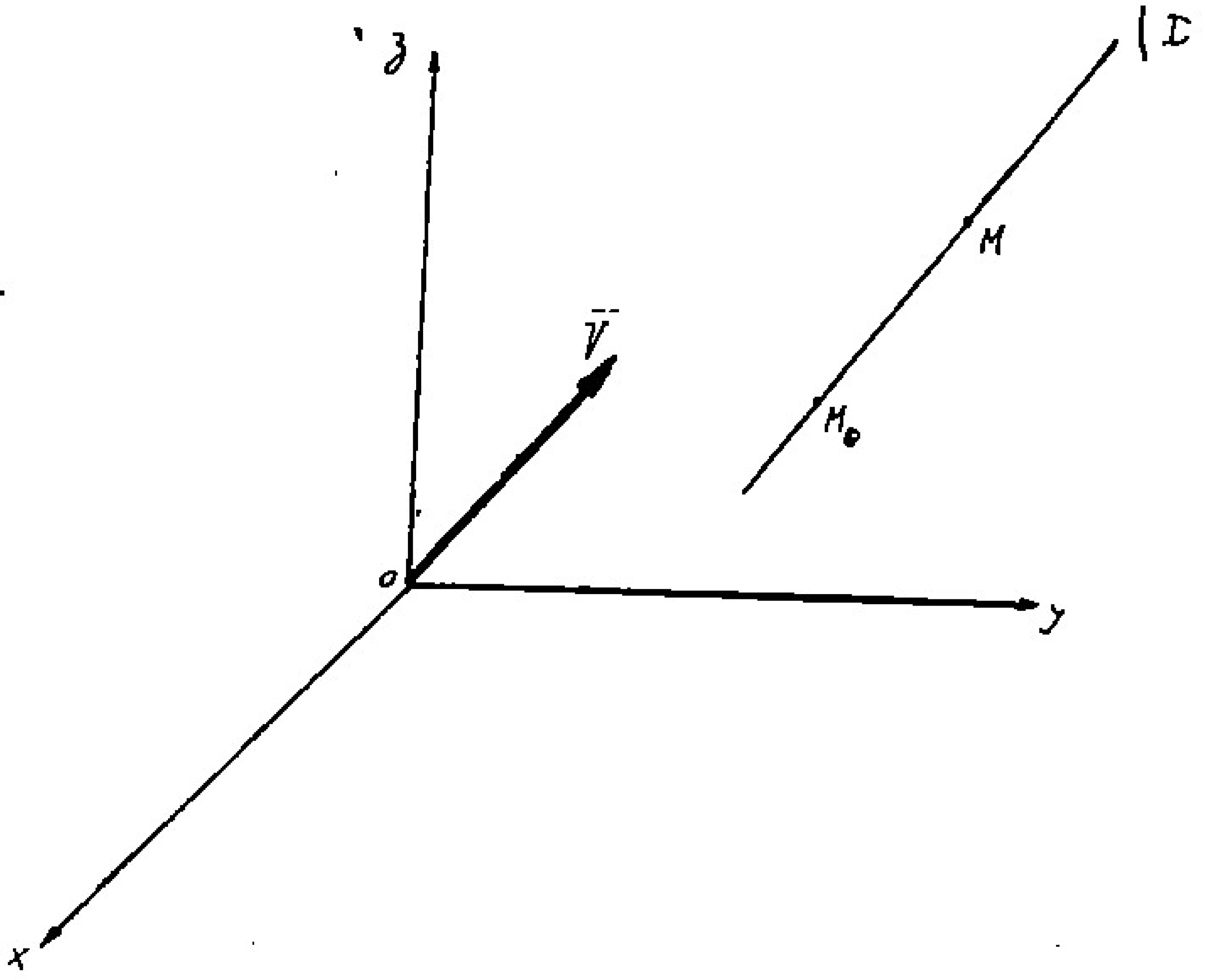
لتكن $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة معلومة و $\vec{V}(u,v,w)$ شعاعا معلوما، ولنوجد معادلة المستقيم D الذي يمر بهذه النقطة ويوازي هذا الشعاع (أو الاستقامة المعينة بهذا الشعاع) .

لنأخذ النقطة $M(x,y,z)$ المتحولة على هذا المستقيم،ففي جميع أوضاع النقطة M على هذا المستقيم تتحقق العلاقة الشعاعية :

$$\overrightarrow{M_0M} \ // \ \vec{V}$$

أي ان الشعاعين $\vec{V}, \overrightarrow{M_0M}$ مرتبطان خطيا فنكتب :

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{V} \qquad (3.1.1)$$



شكل (٢٢)

حيث λ وسيط متحول .

باسقاط هذه العلاقة على المحاور الاحداثية نجد :

$$x - x_0 = \lambda u$$
$$y - y_0 = \lambda v$$
$$z - z_0 = \lambda w$$

ومنه :

$$x = x_0 + \lambda u$$
$$y = y_0 + \lambda v \qquad (3.1.2)$$
$$z = z_0 + \lambda w$$

ان مجموعة المعادلات (3.1.2) تدعى بالمعادلات الوسيطية للمستقيم D . واذا حذفنا الوسيط λ بين هذه المعادلات على الشكل الديكارتي لمعادلة المستقيم :

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w} \qquad (3.1.3)$$

ونلاحظ ان العلاقة (3.1.3) تمثل معادلتين تسميان بالمعادلتين الاساسيتين للمستقيم كما تسمى أحيانا بالشكل المتماثل لمعادلة المستقيم .

ويمكن أن نرى بسهولة ان كل صورة من صور العلاقة (3.1.3) تنعدم عند انعدام مخرجها وذلك واضح من المعادلات الوسيطية (3.1.2) .

ويمكن أن نرى أيضا من (3.1.3) أن النسبتين الاولى والثانية تمثلان مستويا يوازي المحور oz وان النسبتين الاولى والثالثة تمثلان مستويا يوازي المحور oy والمستقيم D هو الفصل المشترك لهذين المستويين .

مثال (1) :

اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم D الذي يمر بالنقطة $M_0(1,2,-3)$ والموازي للشعاع :

$$\vec{V} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

ثم اكتب معادلته بالشكل الاساسي ،وعيّن نقطة تقاطعه مع المستوي xoy .

الحـل :

بتطبيق الدستور (3.1.2) نجد :

$$x = 1 + 2\lambda$$
$$y = 2 + 3\lambda$$
$$z = -3 + \lambda$$

ومنه :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{3+z}{1}$$

يقطع المستقيم المستوي xoy لما z=0 بالتعويض في المعادلات الوسيطية نجد :

$\lambda = 3$ ومنه : $x = 7$ ، $y = 11$

اذن نقطة تقاطع هي :

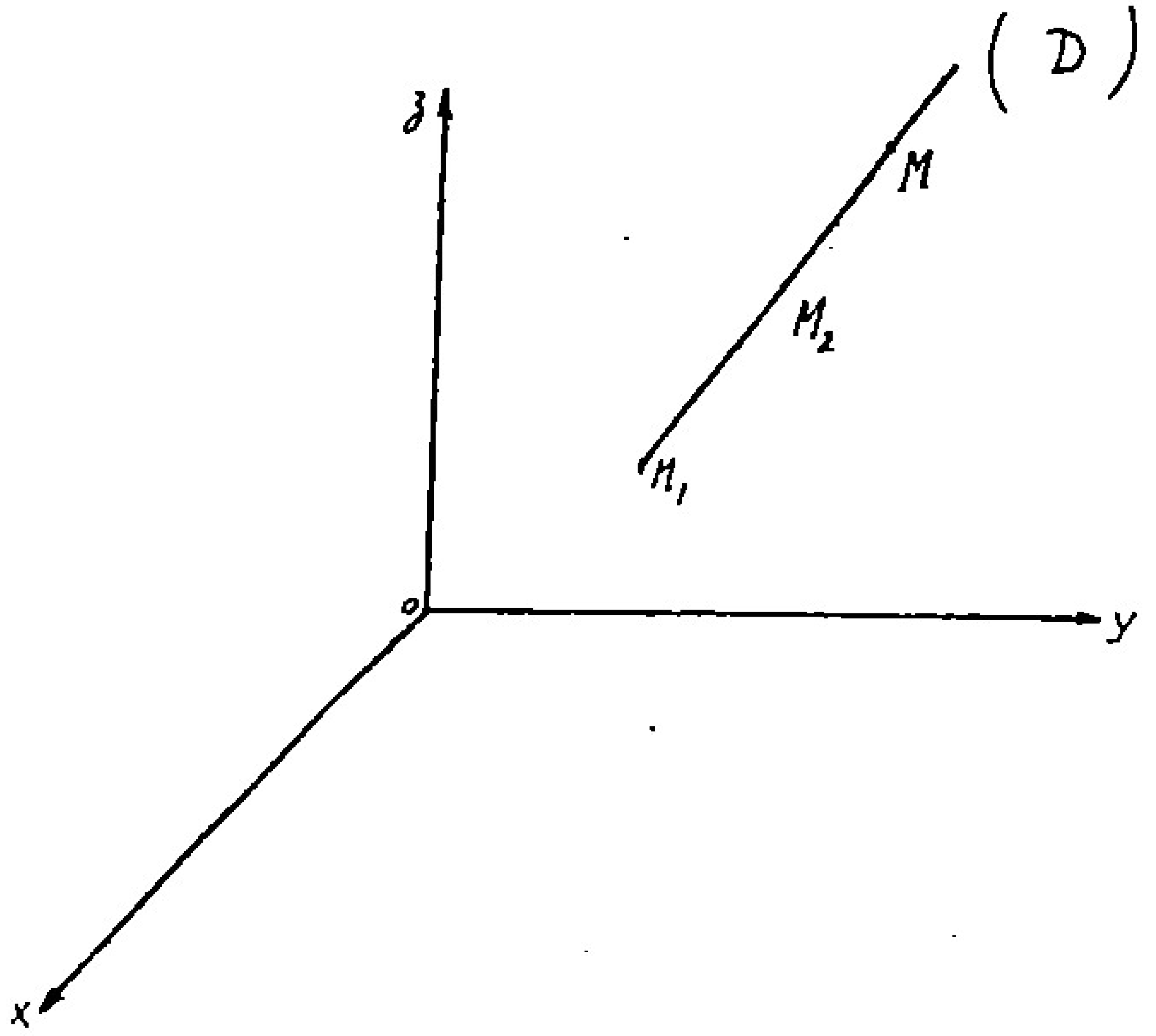
A (7,11,0)

(3.2) ـ معادلة مستقيم يمر بنقطتين معلومتين :

لتكن $M_2(x_2,y_2,z_2),M_1(x_1,y_1,z_1)$ النقطتين المعلومتين .

ولتكن M (x,y,z) نقطة متحولة من المستقيم D ،فاذا اعتبرنا الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ هو شعاع توجيه منحى المستقيم أي $\vec{V} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ ففـي جميع اوضاع M على المستقيم يكون :

$$\overrightarrow{M_1M} \,//\, \overrightarrow{M_1M_2}$$



شكل (٢٣)

وهذا يكافىء المعادلة الشعاعية :

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\ \overrightarrow{M_1M_2} \qquad (3.2.1)$$

باسقاط العلاقة الشعاعية على المحاور الاحداثية نجد :

$$x - x_1 = \lambda \, . \, (x_2 - x_1)$$
$$y - y_1 = \lambda \, . \, (y_2 - y_1)$$
$$z - z_1 = \lambda \, . \, (z_2 - z_1)$$

ومنه :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (3.2.2)$$

وهي المعادلة الديكارتية للمستقيم(أو المعادلتـــان الاساسيتان للمستقيم) كما يمكن ان نكتب المعادلة الشعاعية للمستقيم بالشكل التالي :

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\, \overrightarrow{MM_2} \qquad (3.2.3)$$

وهذه المعادلة الاخيرة تكتب بالشكل :

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda\,(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM})$$

$$\overrightarrow{OM}\,(1+\lambda) = \overrightarrow{OM_1} + \lambda\,\overrightarrow{OM_2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \lambda\,\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda} \qquad (3.2.4)$$

وباسقاط العلاقة الاخيرة على المحاور الاحداثية نجد :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (3.2.5)$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

ومجموعة المعادلات (3.2.5) هي المعادلات الوسيطية لمستقيم يمر بنقطتين معلومتين .

(3.3) ـ معادلة مستقيم معين بتقاطع مستويين معلومين :

ليكن لدينا المستويان المتقاطعان :

$$P_1(x,y,z) \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0$$

$$P_2(x,y,z) \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0 \qquad (3.3.1)$$

فاذا كان D هو الفصل المشترك لهذين المستويين ،فكل نقطة $M(x,y,z)$ تقع علىالمستقيم D تحقق احداثياتها جملة المعادلتين (3.3.1).

لذلك يمكن ان نقول : ان جملة المعادلتين (3.3.1) تؤلف معادلة المستقيم D .

ولتعيين أمثال توجيه منحى هذا المستقيم نقول : ان الشعاع $\overrightarrow{N_1}(p_1,q_1,r_1)$ عمودي على المستوي P_1 والشعاع $\overrightarrow{N_2}(p_2,q_2,r_2)$ عمودي على المستوي P_2 والفصل المشترك D يعامد كلا من الشعاعين $\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}$ وبالتالي فان شعاع توجيه منحى المستقيم D يمكن اعتباره ممثلا بالجداء الخارجي

$$\vec{V} = \overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_2}$$

فاذا عبرنا عن هذا الجداء بمعينة نجد :

$$\vec{V} = \overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{V} = \vec{i}\,(q_1r_2 - r_1q_2) + \vec{j}\,(r_1p_2 - p_1r_2) + \vec{k}\,(p_1q_2 - q_1p_2)$$

مثال :

عيّن أمثال توجيه منحىالمستقيم المعين بالمعادلتين :

$$x - y + z - 2 = 0$$

$$2x + y + 3 = 0$$

الحـــل :

ان أمثال التوجيه المطلوبة هي مركبات الشعاع :

$$\vec{V} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

فأمثال توجيه منحى هذا المستقيم هي (-1,2,3) .

ويمكن الانتقال من الشكل (3.3.1) لمعادلتي المستقيم الــى معادلاته الوسيطية بطريقتين :

الطريقة الاولى :

نختار نقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ تحقق جملة المعادلتين(3.3.1) ثم نوجد منحى المستقيم بايجاد الجداء الخارجي للناظمين $\vec{N_2}, \vec{N_1}$ وعندئذ ترد الى الحالة (3.1) .

الطريقة الثانية :

نختار احد المتحولات في الجملة (3.3.1) وسيطا وليكن $z = \lambda$ فتصبح الجملة بالشكل الآتي :

$$p_1x + q_1y + r_1\lambda + h_1 = 0$$

$$p_2x + q_2y + r_2\lambda + h_2 = 0$$

فاذا كان $p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$ عندئذ يمكننا حل الجملة الجديدة وايجاد قيمتي y,x بدلالة الوسيط λ فنحصل على :

$$x = x(\lambda)$$

$$y = y(\lambda)$$

$$z = \lambda$$

وهي المعادلات الوسيطية للمستقيم .

مثال(١) :

أوجد المعادلتين الاساسيتين للمستقيم المعين بالمعادلتين :

$$x - y + 2z - 5 = 0$$

$$3x + 5y - 4z - 1 = 0$$

الحل :

أولا نوجد امثال توجيه منحى هذا المستقيم :

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{V} = -6\vec{i} + 10\vec{j} + 8\vec{k}$$

فامثال توجيه منحى المستقيم هي :(-3,5,4) .

نختار نقطة من المستقيم فاصلتها $x=1$ مثلا ونعوض في معادلتي المستقيم نجد :

$$-y + 2z - 4 = 0$$

$$5y - 4z + 2 = 0$$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد نقطة من المستقيم وهي (1,2,3) والمعادلتان الاساسيتان هما :

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$$

مثال(٢):

أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المعين بالمعادلتين :

$$x+y-z+1=0$$

$$2x-y+4z+2=0$$

الحل :

نختار أحد المجاهيل وسيطيا وليكن $z=t$ مثلا فنحصل على الجملة

$$x+y-t+1=0$$

$$2x-y+4t+2=0$$

بحل هذه الجملة نحصل على :

$$x=-1-t$$

$$y=2t$$

فالمعادلات الوسيطية للمستقيم هي :

$$z=t\ ,\ y=2t\ ,\ x=-1-t$$

(3.4) - الزاوية بين مستقيمين في الفراغ :

ان الزاوية بين مستقيمين في الفراغ هي الزاوية الكائنة بين منحييهما ، فاذا كان منحى المستقيم الاول D_1 معينا بالشعاع $\vec{V_1}(u_1, v_1, w_1)$ ومنحى المستقيم الثاني D_2 معينا بالشعاع

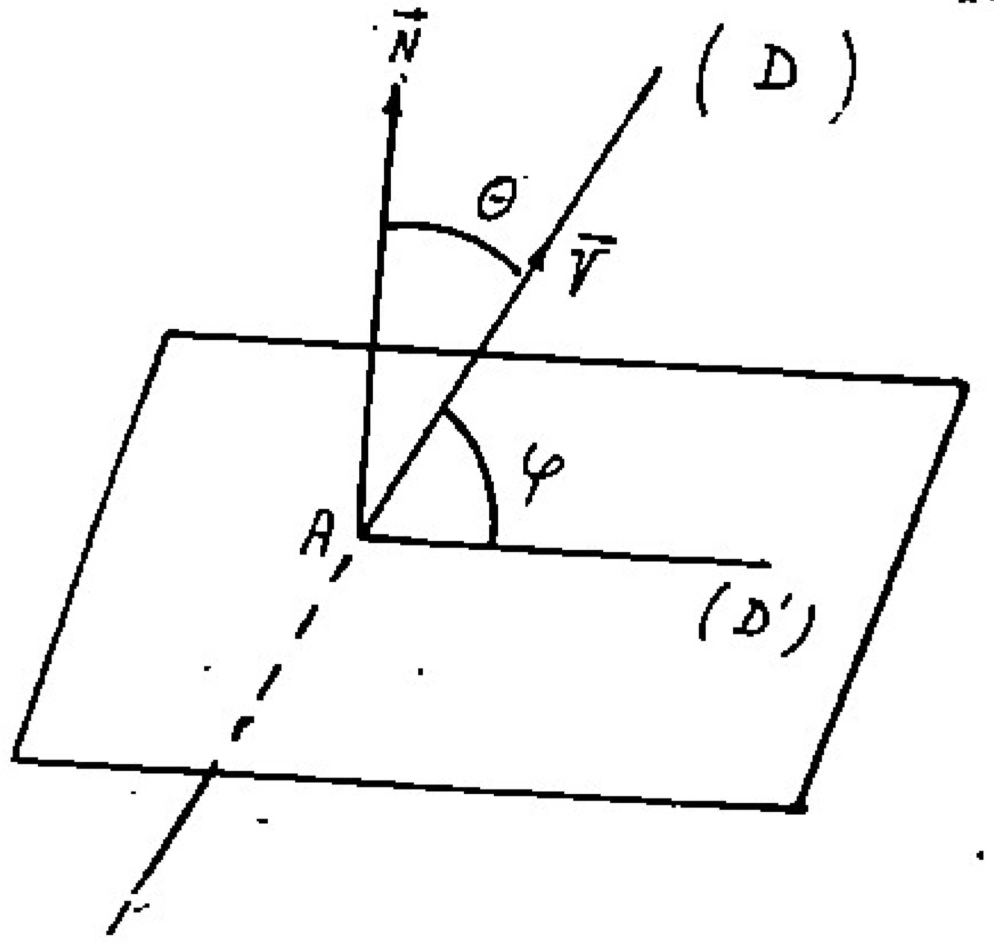
$\vec{V_2}(u_2, v_2, w_2)$ وكانت θ الزاوية الحادة بينهما يكون :

$$\cos\theta = \frac{|\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}|}{|\vec{V_1}| \cdot |\vec{V_2}|}$$

$$\cos\theta = \frac{|u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2|}{\sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2} \cdot \sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2}} \qquad (3.4.1)$$

(3.5)- زاوية مستقيم مع مستو :

هي الزاوية الكائنة بين المستقيم ومرتسمه على هذا المستوي، فاذا كان منحى المستقيم D معينا بالشعاع $\vec{V}(u,v,w)$ وكان منحى الناظم للمستوي P معينا بالشعاع $\vec{N}(p,q,r)$ شكل(٢٤).



شكل (٢٤)

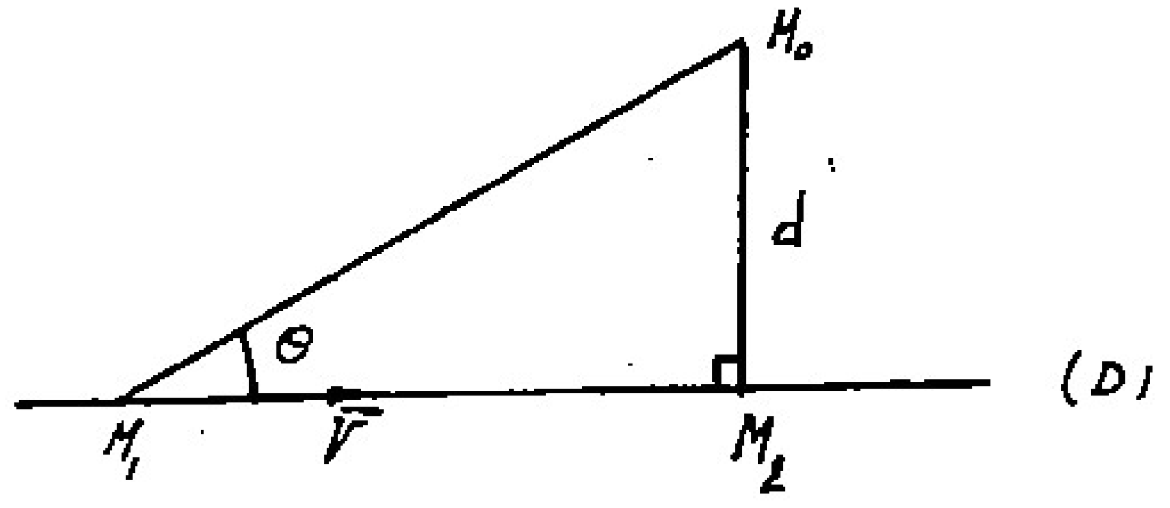
وكانت φ الزاوية بين المستقيم ومرتسمه على المستوي، فهذه الزاوية هي المتممة للزاوية θ الكائنة بين $\vec{V}$ و $\vec{N}$ يكون :

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{V}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{V}|}$$

$$\sin\varphi = \frac{|pu + qv + rw|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \qquad (3.5.1)$$

(3.6) ـ بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم :

بفرض D مستقيم معين بالنقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ وبشعاع منحاه $\vec{V}(u,v,w)$ ولتكن $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة لا تنتمي لهذا المستقيم ولنحسب بعد هذه النقطة عن المستقيم ،فاذا كانت M_2 المسقط القائم للنقطة M_0 على المستقيم D و d هو البعد بين النقطة ومسقطها يكون :



شكل (٢٥)

$$|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{V}| = |\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot |\vec{V}| \cdot \sin\theta = |\vec{V}| \cdot d$$

ومنه نجد :

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} \qquad (3.6.1)$$

مثال :

احسب بعد النقطة $M_0(1,2,-2)$ عن المستقيم D المعين بالمعادلتين الاساسيتين :

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

الحل :

من هذه المعادلة نلاحظ أن المستقيم يمر بالنقطة $M_1(2,0,-1)$ وان شعاع توجيه منحاه هو $\vec{V}(2,-1,2)$

من النقطتين $M_1(2,0,-1)$, $M_0(1,2,-2)$ نجد :

$$\overrightarrow{M_1M_0} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{V} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{V} = 3\vec{i} - 3\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{V}| = 3\sqrt{2} \quad , \quad |\vec{V}| = 3$$

ومنه :

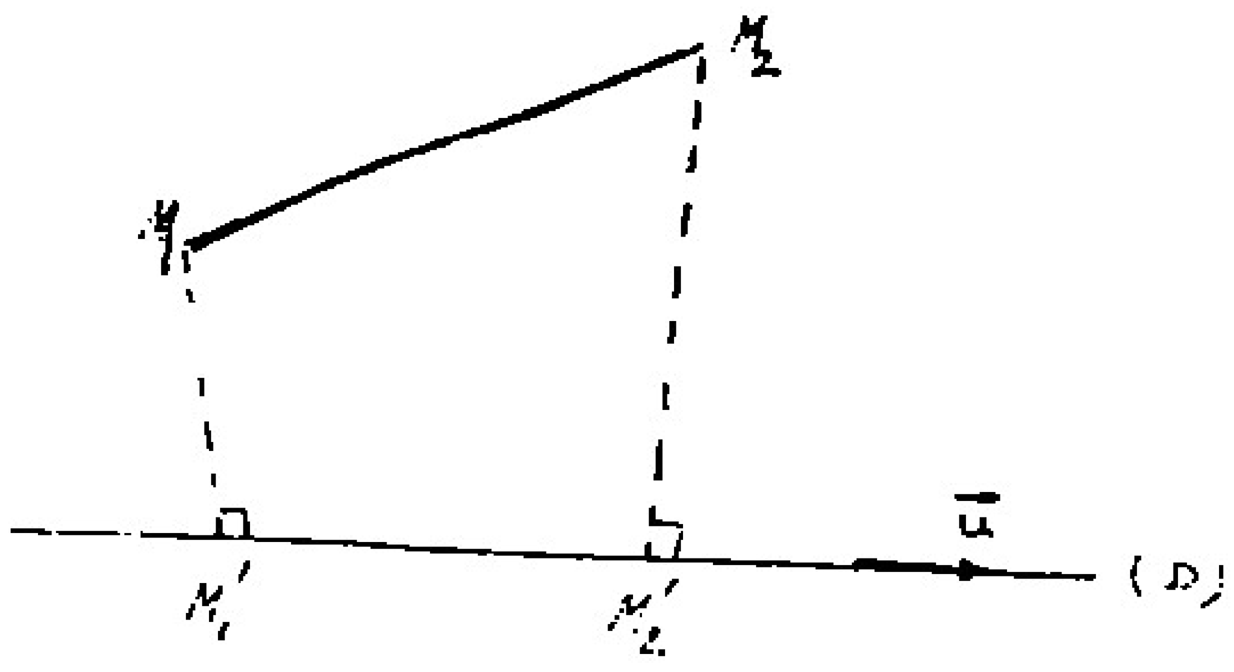
$$d = \sqrt{2}$$

(3.7) ـ طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم :

بفرض D مستقيم معلوم و $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع الواحدة المحمول على هذا المستقيم . ولتكن M_1M_2 قطعة مستقيمة معينة بالنقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ولنحسب طول مسقط هذه القطعة على المستقيم ،شكل (٢٦).

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

ونعلم أن مسقط شعاع كل محور هو قطعة جبرية معينة بالعلاقة :



شكل (٢٦)

مسقط $\overrightarrow{M_1M_2}$ على $\vec{u}$ $= \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{u}$

$$= \alpha (x_2 - x_1) + \beta (y_2 - y_1) + \gamma (z_2 - z_1)$$

وطول المسقط هو القيمة المطلقة للعدد الحقيقي الناتج أي :

$$\text{طول المقط} = |\alpha (x_2 - x_1) + \beta (y_2 - y_1) + \gamma (z_2 - z_1)| \qquad (3.7.1)$$

مثال(١):

احسب طول مسقط القطعة المستقيمة AB المعينة بالنقطتين $A(2,3,5)$, $B(1,4,, -1)$ على المستقيم D المعين بالمعادلتين

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$$

الحل :

ان جيوب تمام توجيه منحى هذا المستقيم هي :

$$\alpha = \frac{2}{3} \ , \ \beta = \frac{-1}{3} \ , \ \gamma = \frac{2}{3}$$

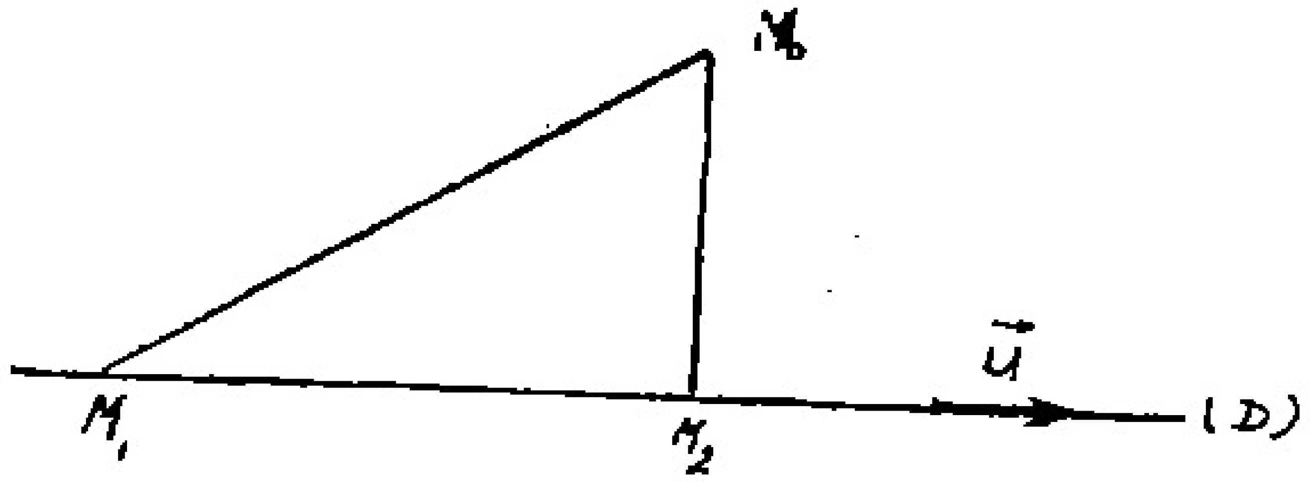
$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\text{طول المسقط} = \left| \frac{2}{3}(-1) - \frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}(-6) \right|$$

$$\text{طول المسقط} = 5$$

ملاحظة :

يمكن الاستفادة من الدستور (3.7.1) لايجاد بعد نقطة عن مستقيم معلوم وذلك باختيار نقطة مثل $M_1(x_1,y_1,z_1)$ من هذا المستقيم وحساب جيوب تمام توجيه منحى المستقيم المعلوم ،فلحساب طول العمود M_0M_2 النازل من $M_0(x_0,y_0,z_0)$ على المستقيم نلاحظ من الشكل(٢٧) أن :



شكل (٢٧)

$$\overline{M_0M_2}^2 = \overline{M_1M_0}^2 - \overline{M_1M_2}^2$$

لكن M_1M_2 هو مسقط القطعة المستقيمة M_1M_0 على المستقيم D الذي جيوب تمام توجيه منحاه هي: α و β و γ فيمكن حساب طول هذا المسقط من العلاقة (3.7.1, كما أن M_1M_0 هو البعد بين النقطتين المعلومتين عندئذ يكون :

$$d^2 = \overline{M_0M_2}^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 - [\alpha (x_0 - x_1) + \beta (y_0 - y_1) + \gamma (z_0 - z_1)]^2 \qquad (3.7,2)$$

مثال :

احسب طول العمود النازل من النقطة $M_0(-1,5,6)$ على المستقيم :

$$\frac{x-2}{2} = y+1 = \frac{z-3}{-2}$$

الحل :

المستقيم يمر بالنقطة $M_1(2,-1,3)$ وجيوب تمام توجيه منحاه هي :

$$\left(\frac{2}{3} \; , \; \frac{1}{3} \; , \; \frac{-2}{3}\right)$$

فاذا كان M_1M_2 هو العمود النازل من M_0 على المستقيم فان

$$\overline{M_1M_0}^2 = (-1-2)^2 + (5+1)^2 + (6-3)^2 = 54$$

$$\overline{M_1M_2}^2 = \left[\frac{2}{3}(-1-2) + \frac{1}{3}(5+1) - \frac{2}{3}(6-3)\right]^2 = 4$$

$$d^2 = \overline{M_0M_2}^2 = 50 \quad , \quad d = 5\sqrt{2}$$

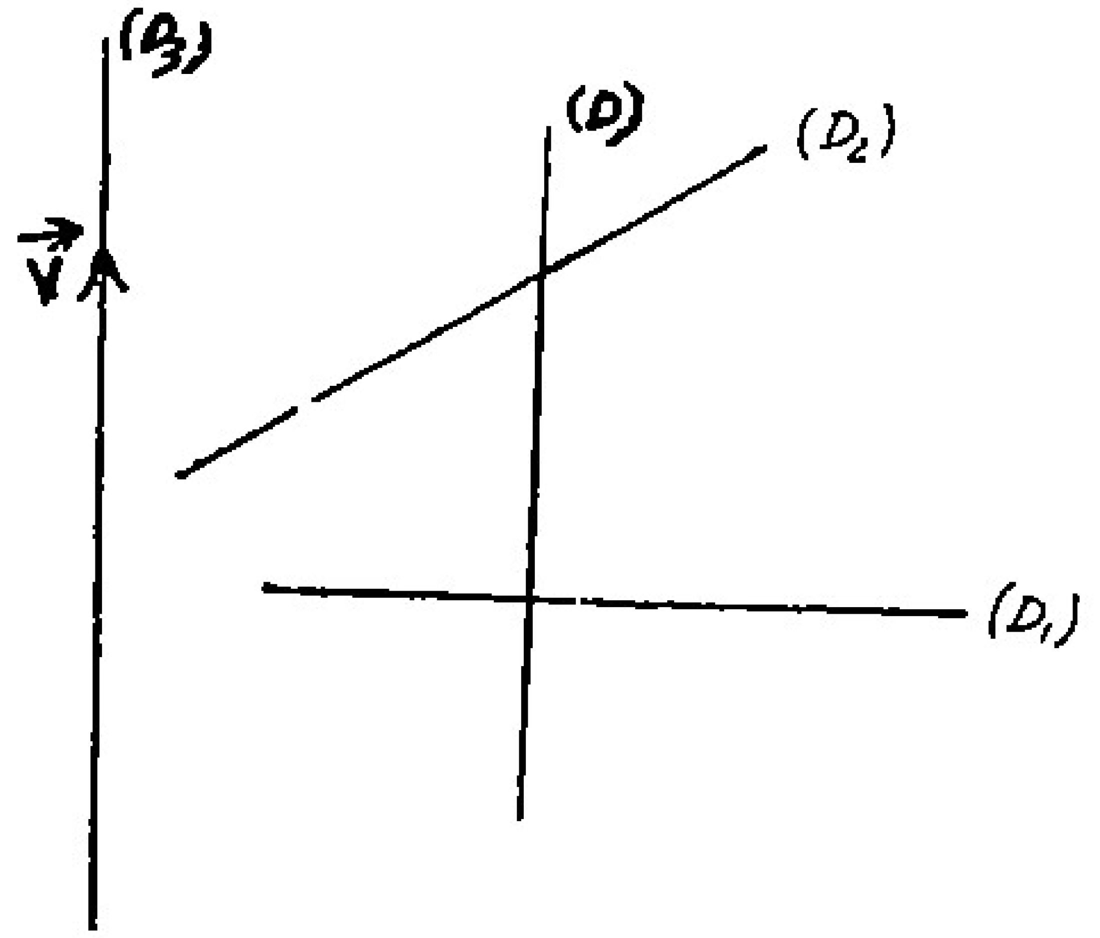
(3.8) – معادلتا مستقيم يقطع مستقيمين معلومين ويوازي منحى معلوما :

ليكن لدينا المستقيمان D_1 و D_2 المعينان بالمعادلات الآتية :

$$D_1 \left| \begin{array}{l} P_1(x,y,z) \equiv p_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1 = 0 \\ P_2(x,y,z) \equiv p_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$D_2 \left| \begin{array}{l} P_3(x,y,z) \equiv p_3 x + q_3 y + r_3 z + h_3 = 0 \\ P_4(x,y,z) \equiv p_4 x + q_4 y + r_4 z + h_4 = 0 \end{array} \right.$$

ولنوجد معادلتي المستقيم D القاطع لهذين المستقيمين والموازي للمستقيم D_3 الذي منحاه معين بالشعاع $\vec{V}(u,v,w)$



شكل (٣٨)

الحل :

ان المستقيم المطلوب D والمستقيم D_1 يشكلان مستويا P_1 يوازي D_3 كذلك ان المستقيم D والمستقيم D_2 يشكلان مستويا P_2 يوازي D_3 .

فالمستقيم المطلوب D هو الفصل المشترك للمستويين P_2, P_1 الموازيين للمستقيم D_3 . ولحل هذه المسألة فراغيا نتبع الخطوات التالية :

١– نمرر من D_1 مستويا P_1 يوازي D_3 .

٢– نمرر من D_2 مستويا P_2 يوازي D_3 .

فالفصل المشترك لهذين المستويين هو المستقيم المطلوب .

ولايجاد معادلتي هذا المستقيم نتبع الخطوات التالية :

١- نوجد معادلة حزمة المستويات المارة من D_1 ونختار مستوي الحزمة مستويا P_1 يوازي D_3 .

٢- نوجد معادلة حزمة المستويات المارة من D_2 ونختار مستوي الحزمة مستويا P_2 يوازي D_3 .

ان جملة معادلتي المستويين P_2, P_1 هي معادلة المستقيم المطلوب .

مثال(١) :

اوجد معادلتي المستقيم D القاطع للمستقيمين :

$$D_2 \left| \begin{array}{ll} 2x+2y+z-1 & =0 \\ -x-z+2 & =0 \end{array} \right. \qquad D_1 \left| \begin{array}{ll} x+y+z-1 & =0 \\ 2x-y+2 & =0 \end{array} \right.$$

والموازي للمستقيم D_3 الذي منحاه معين بالشعاع $V\,(2,-1,4)$

الحل :

ان معادلة حزمة مستويات D_1 هي :

$$P_1(\lambda) \equiv (1+2\lambda)x+(1-\lambda)y+z+2\lambda-1=0$$

$$P_1(\lambda) /\!/ \vec{V} \Leftrightarrow \vec{N}_1(\lambda).\vec{V}=0$$

$$2(1+2\lambda)-1(1-\lambda)+4=0$$

$$5y+5=0 \ , \ \lambda=-1$$

$$P_1(-1) \equiv -x+2y+z-3=0 \qquad (1)$$

وهي معادلة المستوي الاول من معادلتي D .

كذلك ،ان معادلة حزمة مستويات D_2 هي :

$$P_2(\mu) \equiv (2-\mu)x+2y+(1-\mu)z+2\mu-1=0$$

$$P_2(\mu) /\!/ \vec{V} \Leftrightarrow \vec{N}_2(\mu).\vec{V}=0$$

$$2(2-\mu)-1(2)+4(1-\mu)=0$$

$$-6\mu+6=0 \ ; \ \mu=1$$

$$P_2(1) \equiv x+2y+1=0 \qquad (2)$$

وهي معادلة المستوي الثاني من معادلة D .

فالمعادلتان (1) ، (2) معا هما معادلتا المستقيم المطلوب .

أي

$$D \left| \begin{array}{ll} -x+2y+z-3 & =0 \\ x+2y+1 & =0 \end{array} \right.$$

(3.9) ـ معادلة العمود المشترك لمستقيمين في الفراغ:

ترد هذه المسألة الى سابقتها في الفقرة (3.8) لان منحى العمود المشترك يمكن استنتاجه من الجداء الخارجي لشعاع المنحى للمستقيمين D_2, D_1 أي :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

وبعدئذ نعيد خطوات المسألة السابقة فنحصل على المطلوب .

مثال :

أوجد معادلتي العمود المشترك للمستقيمين الآتيين :

$$D_2 \left| \begin{array}{l} x + 2z + 1 = 0 \\ 3x - y + z - 2 = 0 \end{array} \right. \qquad D_1 \left| \begin{array}{l} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array} \right.$$

الحل :

أولا نوجد منحى هذين المستقيمين :

$$\vec{V_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V_1} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V_2} = 2\vec{i} + + 5\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & +1 \end{vmatrix} = \text{منحى العمود المشترك}$$

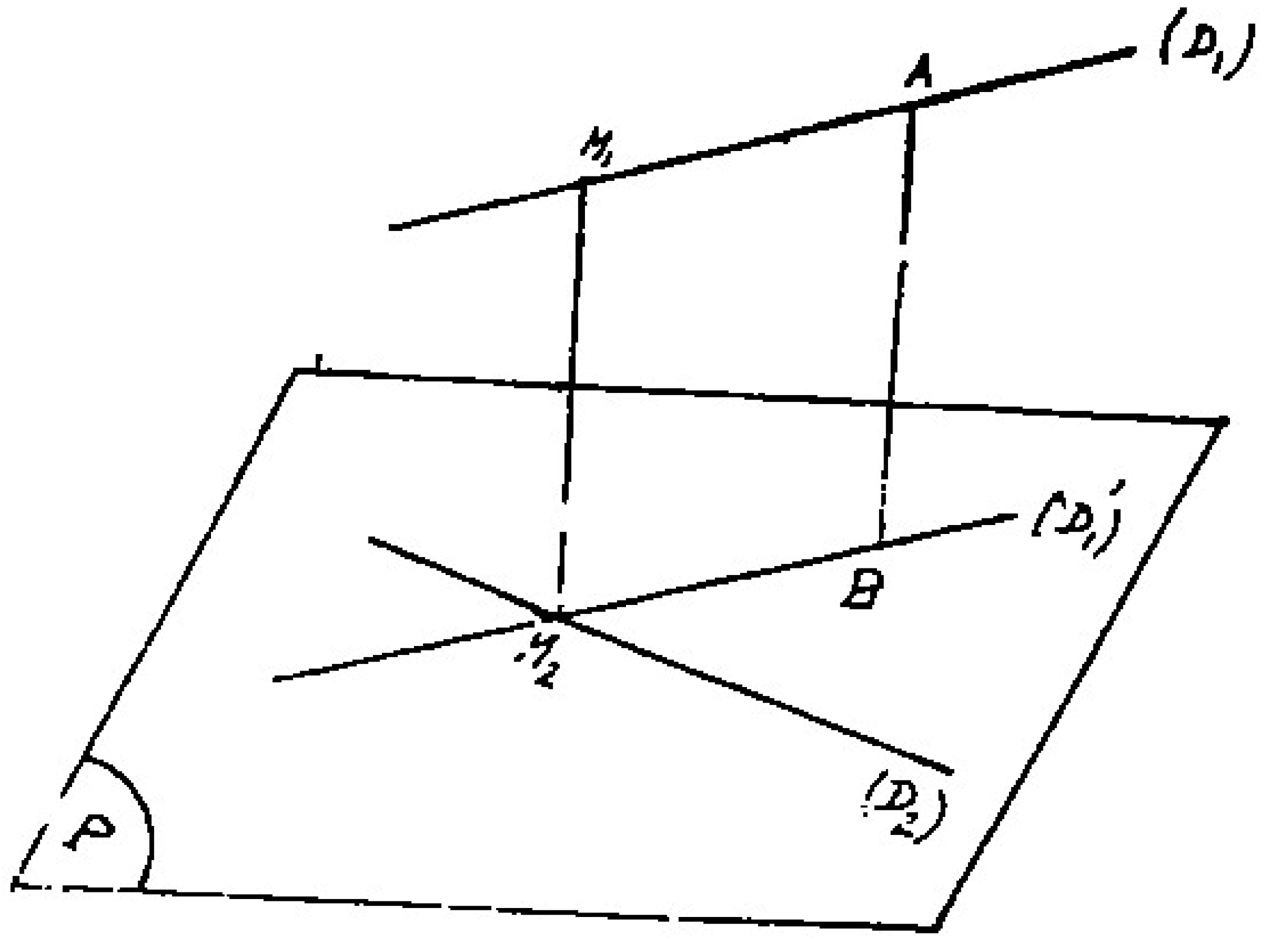
وبعدئذ نوجد معادلتي العمود المشترك بنفس الطريقة التي اتبعناها في حل المثال(1) من الفقرة السابقة.

(3.10) - أقصر بعد بين مستقيمين :

بفرض D_2, D_1 مستقيمين في الفراغ ولنحسب اقصر بعد بينهما، أي لنحسب طول قطعة من العمود المشترك لهما المحدودة بنقطتي تقاطع

العمود المشترك مع المستقيمين المطروفين •

ولنبدأ بالحل الفراغي لهذه المسألة :



شكل (٢٩)

١- نمرر من D_2 مستويا P يوازي المستقيم D_1 •

٢- نسقط D_1 على المستوي P فنحصل على المستقيم D'_1 •

٣- نقيم من النقطة M_2 نقطة تلاقي D'_1 مع D_2 عمودا على المستوي فيقطع D_1 على التعامد في النقطة M_1، فالقطعة M_1M_2 هي قطعة العمود المشترك وتمثل اقصر بعد بين المستقيمين فلو اخذنا اي نقطة اختيارية مثل A من المستقيم d_1 وانزلنا منها عمودا على المستوي P مثل AB فان $AB = M_1M_2$ اي لحساب طول قطعة العمود المشترك يكفي أن نحسب بعد نقطة اختيارية من D_1 من المستوي P •

والحل التحليلي لهذه المسألة يصبح كالآتي :

١- نمرر من D_2 حزمة مستويات •

٢- نختار من الحزمة مستويا مثل P يوازي المستقيم D_1 •

٣- نختار من نقطة ما من المستقيم D_1 ونحسب بعدها من المستوي P.

مثال .

احسب اقصر بعد بين المستقيمين الآتيين .

$$D_2 \left| \begin{array}{l} 2x+y-2z+1=0 \\ x-y+2 \qquad = 0 \end{array} \right. \qquad D_1 \left| \begin{array}{l} x+y-z+2=0 \\ x+z-1 \qquad = 0 \end{array} \right.$$

الحل.

١- نمرر حزمة مستويات من D_2 معادلتها

$$P_2(\lambda) = (2+\lambda)x + (1-\lambda)y - 2z + 2\lambda + 1 = 0$$

لنوجد منحى المستقيم D_1.

$$\vec{V_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V_1} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

٢-

$$P_2(\lambda) // D_1 \iff \vec{N_2}(\lambda)\ \vec{V_1} = 0$$

$$(2+\lambda) - 2(1-\lambda) + 2 = 0$$

$$3\lambda + 2 = 0 \quad , \quad \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$P_2\left(-\frac{2}{3}\right) \equiv \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}y - 2z - \frac{1}{3} = 0$$

$$P_2 \equiv 4x + 5y - 6z - 1 = 0$$

٣- نختار نقطة من D_1 راقمها $z=0$ مثلا فيكون $x=1$ ، $y=-3$

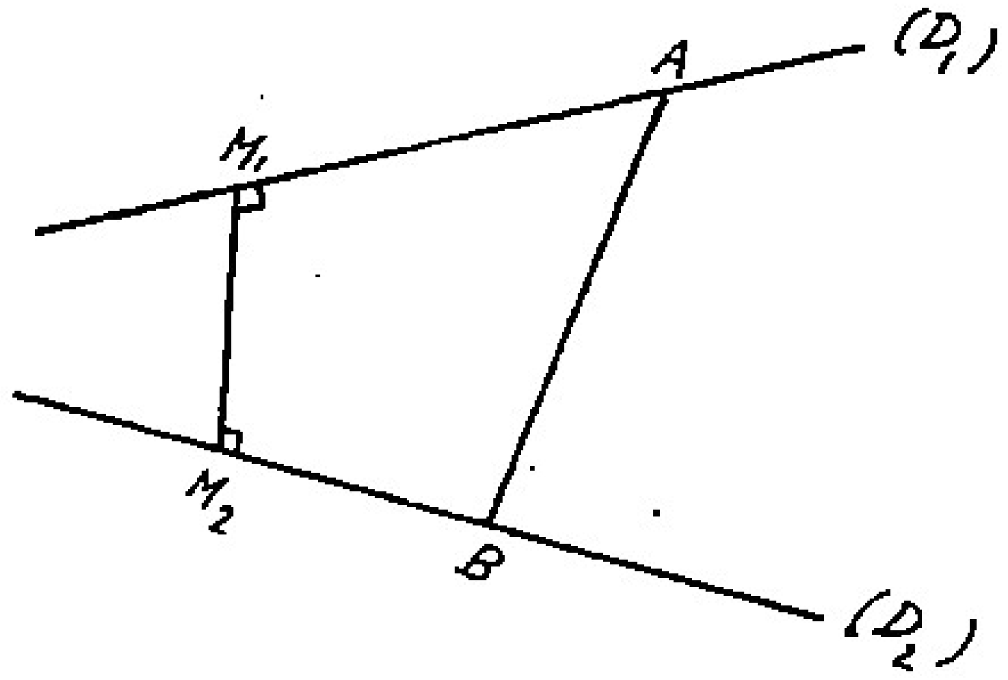
اي $A(1,-3,0)$ هي النقطة المختارة.

نحسب بعد A عن المستوي P_2 :

$$d = \frac{|4-15-1|}{\sqrt{16+25+36}} = \frac{12}{\sqrt{77}}$$

(3.11) - طريقة ثانية لحساب أقصر بعد بين مستقيمين معلومين :

بفرض D_1, D_2 مستقيمين معلومين في الفراغ ،لحساب أقصر بعد بينهما يمكن أن نتبع الطريقة التالية :



شكل (٣٠)

لتكن M_1M_2 قطعة العمود المشترك بين المستقيمين D_1,D_2 نختار نقطة مثل $A(x_1,y_1,z_1)$ من المستقيم D_1، كذلك نختار نقطة مثل $B(x_2,y_2,z_2)$ من المستقيم D فيمكن اعتبار M_1M_2 مسقطا للقطعة AB على منحى العمود المشترك للمستقيمين لذلك نحسب جيوب تمام توجيه منحى العمود المشترك للمستقيمين ثم نطبق الدستور (3.7.1) .

مثال(١):

احسب طول العمود المشترك بين المستقيمين :

$$(D_1) \qquad \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{2}$$

$$(D_2) \qquad \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = z$$

الحل :

ان أمثال توجيه منحى المستقيم الاول هي : $(3,-5,2)$

وامثال توجيه منحى المستقيم الثاني هي : $(2,-3,1)$

فامثال توجيه منحى العمود المشترك تعطى بالمعينة :

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

وبالتالي فان جيوب تمام توجيه منحى العمود المشترك هي :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

المستقيم D_1 يمر بالنقطة $A(2,1,-2)$ والمستقيم D_2 يمر بالنقطة $B(0,0,0)$ وطول العمود المشترك هو :

$$M_1M_2 = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}(2-0) + \frac{1}{\sqrt{3}}(1-0) + \frac{1}{\sqrt{3}}(-2-0)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3.12) ـ تقاطع مستقيم مع مستو :

الحالة الاولى : اذا كان المستقيم معينا بالمعادلات الوسيطية

ليكن لدينا المستوي المعين بالمعادلة :

$$P \equiv px + qy + rz + h = 0$$

والمستقيم D معين بالمعادلات الوسيطية :

$$z = z_0 + \lambda w \ , \ y = y_0 + \lambda v \ , \ x = x_0 + \lambda u$$

ولنوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي .

ان نقطة التقاطع تحقق احداثياتها معادلات المستقيم والمستوي معا ، لذلك نعوض z, y, x بما يساويها في معادلة المستوي يكون :

$$p(x_0 + \lambda u) + q(y_0 + \lambda v) + r(z_0 + \lambda w) + h = 0$$

وهذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$(px_0 + qy_0 + rz_0 + h) + \lambda(pu + qv + rw) = 0 \qquad (3.12.1)$$

منه :

$$\lambda = -\frac{px_0 + qy_0 + rz_0 + h}{pu + qv + rw}$$

بشرط :

$$pu + qv + rw \neq 0$$

وهذا الشرط يعني عدم توازي المستقيم مع المستوي ، وبتعويض λ بقيمتها في المعادلات الوسيطية للمستقيم نجد احداثيات نقطة التقاطع وهي وحيدة.

أما اذا كان $pu+qv+rw= 0$ فتصبح المعادلة (3.12.1) من الشكل :

$$0 \cdot \lambda = -(p x_0 + q y_0 + r z_0 + h) \quad (3.12.2)$$

وعندئذ تكون امام حالتين :

١- $(p x_0 + q y_0 + r z_0 + h) = 0$ عندئذ تكون المعادلة (3.12.2) محققة مهما كانت λ وعندئذ يكون المستقيم واقعا في المستوي P .

٢- $(p x_0 + q y_0 + r z_0 + h) \neq 0$ عندئذ تكون المعادلة (3.12.2) مستحيلة التحقيق وعندئذ يكون المستقيم موازيا للمستوي P .

الحالة الثانية : اذا كان المستقيم معينا بتقاطع مستويين.

ليكن المستوي P معينا بالمعادلة :

$$P \equiv px + qy + rz + h = 0$$

والمستقيم D معين بالمعادلتين :

$$P_1 \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0$$

$$P_2 \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0$$

بحل جملة المعادلات الثلاثة نجد احداثيات نقطة التقاطع بشرط أن تكون معينه الامثال $\Delta \neq 0$.

أما اذا كانت معينة الامثال $\Delta = 0$ أي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

أي اذا كانت نواظم هذه المستويات واقعة في مستو واحد،

عندئذ نكون امام حالتين :

١- يوجد للمعادلات الثلاثة عدد لا متناهي من الحلول ،وهذا يتم اذا كانت المستويات الثلاثة مشتركة بفصل مشترك واحد هو المستقيم D .

٢- لا يوجد للمعادلات الثلاثة حل مشترك وبالتالي فالمستويات الثلاثة لا تتقاطع معا بأي نقطة وعندئذ يكون المستقيم D موازيا للمستوي P .

مثال (1) :

اوجد نقطة تقاطع المستوي :

$$3x + 3y + 3z - 3 = 0$$

مع المستقيم :

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

الحل :

المعادلات الوسيطية لهذا المستقيم هي :

$$z =-3+2t, \quad y=3-t, \quad x = -5 +3t$$

بالتعويض في معادلة المستوي نجد $9t-18 = 0$ ومنه $t = 2$

نعوض t بقيمتها في معادلات المستقيم

$$z=1\ ,\ y=1\ ,\ x=1$$

فنقطة التقاطع هي :

$$(1,1,1)$$

مثال (٢)

أوجد نقطة تقاطع المستوي

$$3x+y-4z-7=0$$

مع المستقيم المذكور في المثال(١).

بنفس طريقة المثال(١) نجد $0.t=7$ وهذه المعادلة مستحيلة

لذلك فالمستقيم لا يقطع المستوي .

مثال(٢)

اوجد نقطة تقاطع المستوي

$$3x+y-4z=0$$

مع المستقيم المذكور في المثال(١).

بنفس الطريقة نجد $0.t=0$ لهذه المعادلة عدد لا متناه من الحلول لذلك فالمستقيم يقع في المستوي .

(4.13) ـ شرط تقاطع مستقيمين (او وقوعهما في مستو واحد).

اذا كان المستقيمان .

$$(D_1)\qquad \frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{v_1}=\frac{z-z_1}{w_1}\qquad (1)$$

$$(D_2)\qquad \frac{x-x_2}{u_2}=\frac{y-y_2}{v_2}=\frac{z-z_2}{w_2}\qquad (2)$$

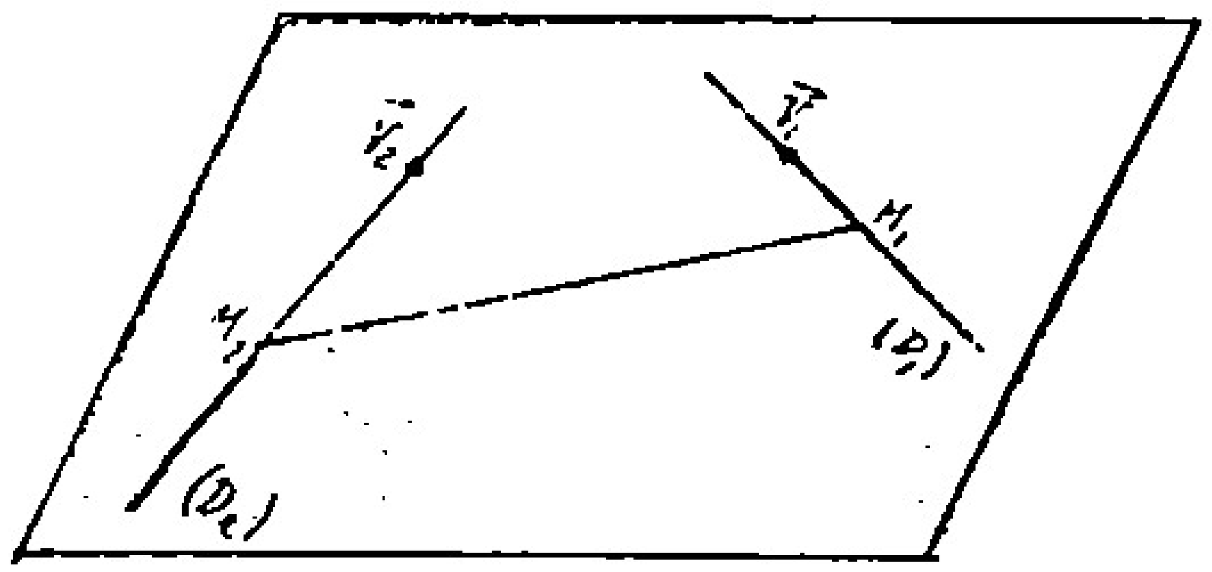
واقعين في مستو واحد عندئذ تكون :

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2})=0$$

حيث $M_1\in D_1$, $M_2\in D_2$, $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ شعاعا منحيي المستقيمين،
ونعبر عن الجداء المختلط بالمعينة :

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.13.1)$$

وبالعكس اذا كان الشرط (3.13.1) محققا عندئذ يقع المستقيمان في مستو واحد .



شكل (٣١)

بالحقيقة اذا وقع المستقيمان D_2,D_1 في مستو واحد فالمستقيم M_1M_2 شكل(٣١) يقع أيضا في نفس المستوي اي ان الاشعة $\vec{V}_2,\vec{V}_1$، $\overrightarrow{M_1M_2}$ تقع في مستو واحد (وبالعكس) • وهذا ما عبرنا عنه بالشرط (3.13.1)•

ملاحظة :

اذا كان

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

فالشرط (3.13.1) محقق حتما،عندئذ المستقيمان متوازيان ، واذا لم يتوفر شرط التوازي فالمستقيمان المحققان للشرط(3.13.1) متقاطعان •

مثال :

بيّن فيما اذا كان المستقيمان :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \qquad (1)$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4} \qquad (2)$$

متقاطعين ،ثم عيّن نقطة تقاطعهما في حالة التقاطع •

الحل :

المستقيمان (1) ، (2) يقعان في مستو واحد لان الشرط (3.13.1) محقق :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

كما أن هذين المستقيمين غير متوازيين (لان أمثال توجيه منحى الاول لا تتناسب مع أمثال توجيه منحى الثاني) • ولايجاد نقطة التقاطع ،علينا أن نحل جملة المعادلات الاربعة (1)،(2) ذات المجاهيل الثلاثة z,y,x • ففي الحالة العامة هذه المعادلات الاربعة ليس لها أي حل ،لكن في هذه الحالة يوجد لها حل لان الشرط (3.13.1) محقق • لذلك نوجد الحل المشترك لثلاث منها فنحصل على :

$$z = 3 \;,\; y = 2 \;,\; x = 1$$

والمعادلة الرابعة محققة حتما،فنقطة التقاطع هي(1,2,3)

اما اذا كان المستقيمان D_2,D_1 معطيين بالمعادلات :

$$D_1 \left| \begin{array}{l} P_1 \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0 \\ P_2 \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$D_2 \left| \begin{array}{l} P_3 \equiv p_3x + q_3y + r_3z + h_3 = 0 \\ P_4 \equiv p_4x + q_4y + r_4z + h_4 = 0 \end{array} \right.$$

فان وجود المستقيمين D_2,D_1 في مستوي واحد ،يعني أن هذا المستوي يكون أحد مستويات الحزمة المعينة بالمستويين P_2,P_1 وبنفس الوقت يكون هذا المستوي أحد مستويات الحزمة المعينة بالمستويين P_4,P_3 فيوجد عندئذ أربعة وسطاء $\lambda_4,\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1$ بحيث تتحقق المعادلة :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$$

أي أن احدى المعادلات الاربعة يمكن استنتاجها من المعادلات الثلاثة الاخرى ،وعندئذ الشرط اللازم والكافي هو :

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & h_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & h_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & h_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.13.2)$$

مثال(١):

اثبت أن المستقيمين :

$$D_1 \left| \begin{array}{l} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ 3x - 2z + 1 = 0 \end{array} \right. \qquad D_2 \left| \begin{array}{l} x + y + z - 3 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

يقعان في مستو واحد ثم عيّن نقطة تقاطعهما .

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

فالشرط (3.13.2) محقق وبالتالي يقع المستقيمان في مستو واحد .

اما نقطة التقاطع فنحصل عليها بايجاد الحل المشترك لثلاث من المعادلات الاربعة فنجد $x = 1$, $y=0$, $z = 2$, ونرى بسهولة أنها تحقق الرابعة .

مثال (٢) :

أثبت أن المستقيمين :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$$

يقعان في مستو واحد ،اوجد معادلةهذا المستوي ثم عيّن نقطة تقاطعهما .

الحل :

ان شرط وقوع المستقيمين في مستو واحد هو :

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 3-2 & 4-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 .$$

وهذا محقق .

معادلة مستويهما هي معادلة مستو يمر من نقطة معلومةويوازي منحيين .

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه

$$x - 2y + z = 0$$

ولايجاد نقطة التقاطع نكتب معادلة المستقيم الاول بالشكل الوسيطي :

$$x = 2t + 1$$
$$y = 3t + 2$$
$$z = 4t + 3$$

ثم نعوض في احدى معادلتي المستقيم الآخر ،فنجد $t = -1$

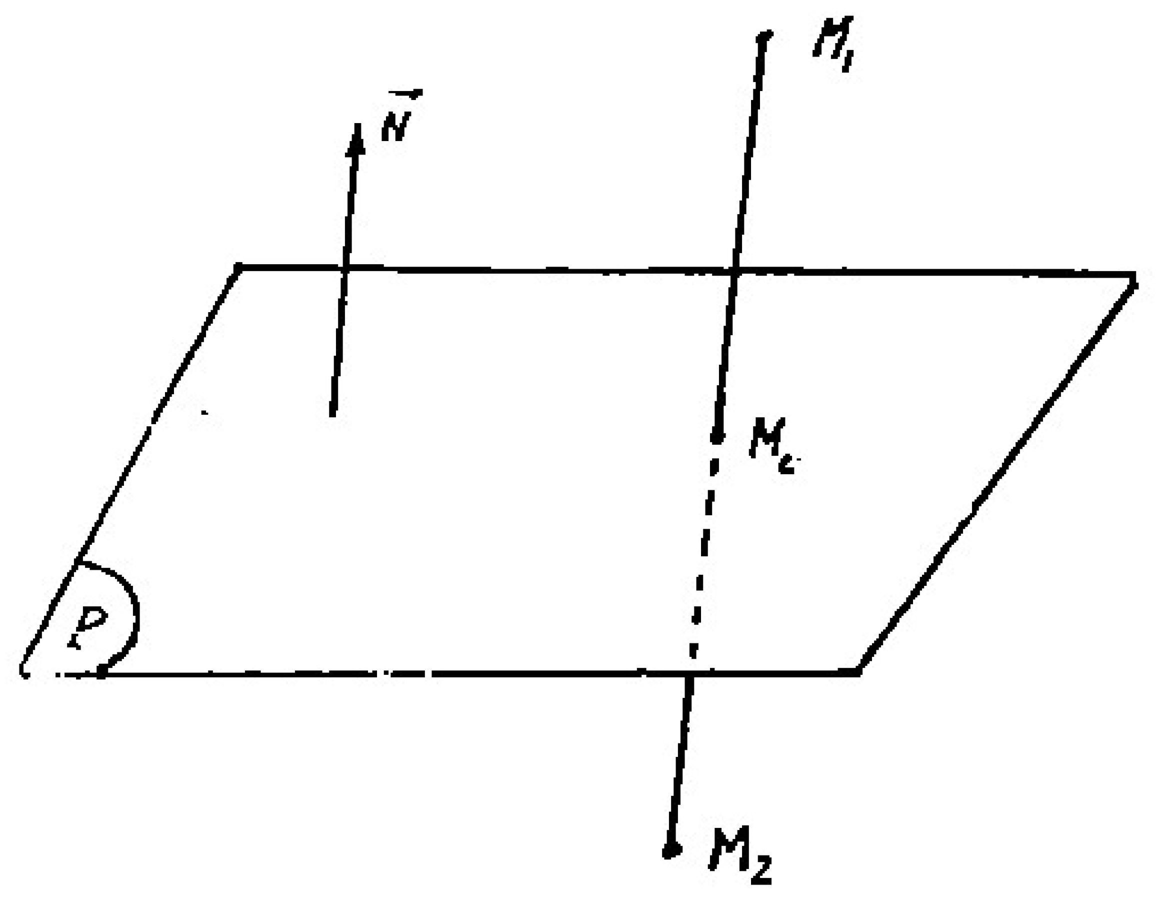
ونقطة التقاطع هي : $(-1,-1,-1)$

(3.14) – التناظر بالنسبة الى مستو :

تعريف : نقول عن النقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ انهما متناظرتان بالنسبة للمستوي :

$$P \equiv px + qy + rz + h = 0$$

اذا كان هذا المستوي يعامد القطعة M_1M_2 في منتصفها.



شكل (٣٢)

بما أن المستوي P يعامد M_1M_2 عندئذ نكتب :

$$\overrightarrow{M_2M_1} \parallel \vec{N}$$

وهذا يعني :

$$\frac{x_1 - x_2}{p} = \frac{y_1 - y_2}{q} = \frac{z_1 - z_2}{r} \qquad (3.14.1)$$

والنقطة M_0 منتصف M_1M_2 تحقق احداثياتها معادلة المستوي أي:

$$p\,\frac{x_1 + x_2}{2} + q\,\frac{y_1 + y_2}{2} + r\,\frac{z_1 + z_2}{2} + h = 0 \qquad (3.14.2)$$

ان المعادلات الثلاثة في العلاقتين السابقتين تمكننا من ايجاد احدى النقطتين اذا عرفنا الاخرى والمستوي P ،كذلك تمكننا من ايجاد معادلة المستوي P اذا عرفنا النقطتين المتناظرتين .

مثال(١):

اوجد نظيرة النقطة $M_1(1,0,1)$ بالنسبة للمستوي :

$$x + y + z + 1 = 0$$

الحل :

نفرض $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نظيرة M_1 بالنسبة لهذا المستــــوي

حسب (3.14.1) و(3.14.2) نجد :

$$x_2 - 1 = y_2 = z_2 - 1$$

$$\frac{1 + x_2}{2} + \frac{y_2}{2} + \frac{1 + z_2}{2} + 1 = 0$$

بحل جملة المعادلات الثلاثة نجد :

$$x_2 = z_2 = -1 \quad , \quad y_2 = -2$$

والنقطة هي $M_2(-1,-2,-1)$

مثال (٢) :

أوجد معادلة المستوي الذي يناظر المستوي :

$$P_1 \equiv x-2y+z - 1 = 0$$

بالنسبة للمستوي :

$$P \equiv 2x + y - 2z = 0$$

الحل :

لتكن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة من المستوي P_1 و$M_2(x_2, y_2, z_2)$ نظيرتها بالنسبة للمستوي P .

ان النقطتين M_1 وM_2 تحققان المعادلات(3.14.1)و(3.14.2)

$$\frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{y_1 - y_2}{1} = \frac{z_1 - z_2}{-2} \qquad (1)$$

$$2\,\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} - 2\,\frac{z_1 + z_2}{2} = 0 \qquad (2)$$

كما ان النقطة M_1 تحقق احداثياتها معادلة المستوي P_1 أي:

$$x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0 \qquad (3)$$

اذا كتبنا المعادلة (1) بالشكل الوسيطي نجد :

$$z_1 = z_2 - 2t \quad , \quad y_1 = y_2 + t \quad , \quad x_1 = x_2 + 2t$$

وبالتعويض في (2) نجد :

$$2\,\frac{2x_2 + 2t}{2} + \frac{2y_2 + t}{2} - 2\,\frac{2z_2 - 2t}{2} = 0$$

$$4x_2 + 2y_2 - 4z_2 + 9t = 0 \qquad (4)$$

وبالتعويض في (3) نجد :

$$x_2 - 2y_2 + z_2 - 2t - 1 = 0 \qquad (5)$$

وبحذف t بين المعادلتين (4) ،(5) نجد :

$$17x_2 - 14y_2 + z_2 - 9 = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب .

مثال(٢) :

اوجد معادلتي المستقيم D_2 الذي يناظر المستقيم :

$$D_1 \left| \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + 2y - 1 = \end{array} \right.$$

بالنسبة للمستوي :

$$P \equiv x + y + z + 3 = 0$$

الحل :

لتكن لـ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة من المستقيم D_1 ولتكن $M_2(x,y,z)$ نظيرتها من D_2 بالنسبة للمستوي P ، النقطتان M_2, M_1 تحققـــان المعادلات (3.14.1) ، (3.14.2) كما أن النقطة M_1 تحقق معادلتـــي المستقيم D_1 وبذلك يصبح لدينا خمس معادلات خطية تربط احداثيـــات M_1 باحداثيات M_2 ، فاذا حسبنا x_1,y_1,z_1 بدلالة x,y,z من ثـــلاث معادلات منها وعوضنا في المعادلتين الباقيتين نحصل على معادلتـــي المستقيم المطلوب ، حسب (3.14.1) ، (3.14.2) لدينا :

$$\frac{x_1 - x_2}{1} = \frac{y_1 - y_2}{1} = \frac{z_1 - z_2}{1} \qquad (1)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{z_1 + z_2}{2} + 3 = 0 \qquad (2)$$

من (1) نحصل على المعادلتين :

(3) $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ ومنها $x_1 = y_1 + x_2 - y_2$

(4) $y_1 - y_2 = z_1 - z_2$ ومنها $z_1 = y_1 + z_2 - y_2$

بالتعويض في (2) نجد :

$$y_1 = -2 + \frac{1}{3}(-2x_2 + y_2 - 2z_2)$$

وبالتعويض في (3) ، (4) نجد :

$$z_1 = -2 + \frac{1}{3}(-2x_2 - 2y_2 + z_2)$$

$$x_1 = -2 + \frac{1}{3}(x_2 - 2y_2 - 2z_2)$$

نعوض x_1,y_1,z_1 في معادلتي D_1 فنجد :

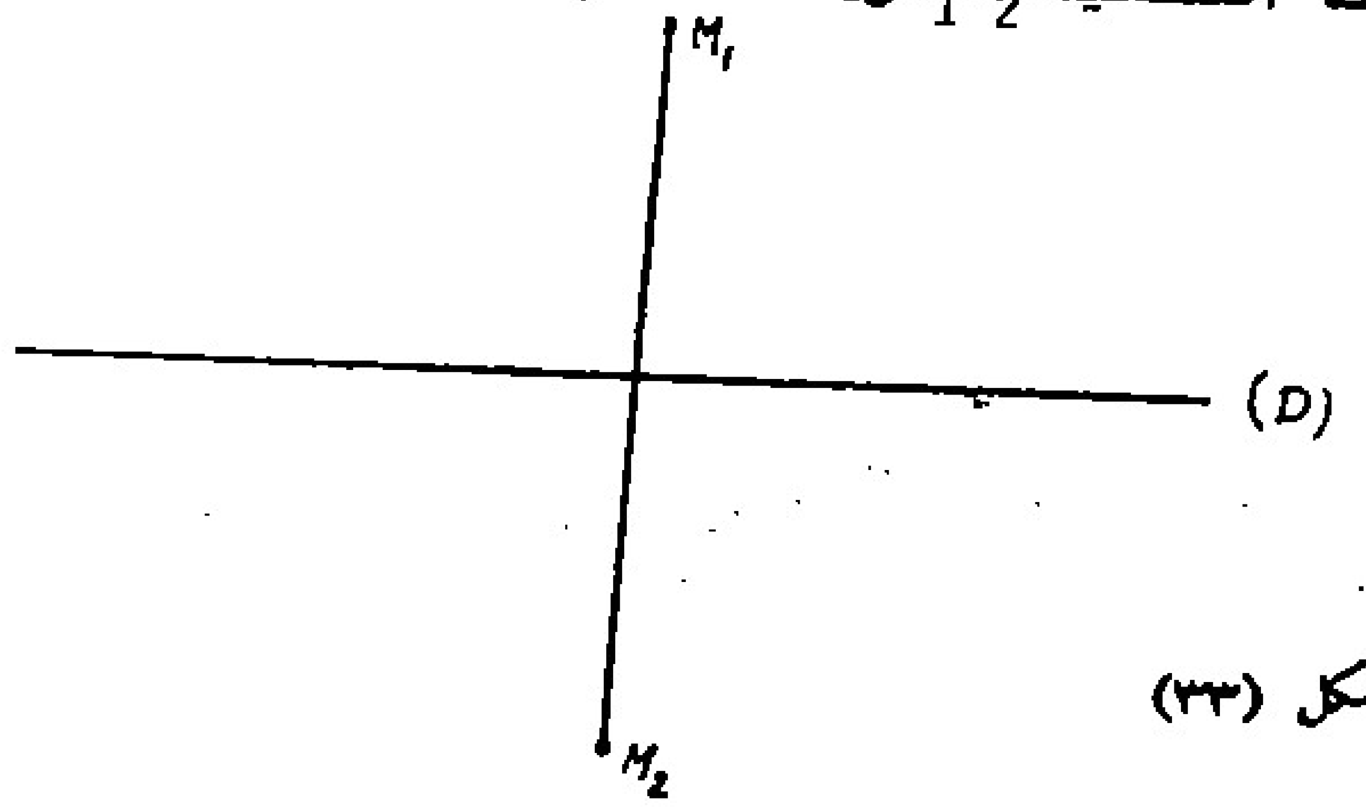
$$x_2 - 5y_2 + z_2 - 2 = 0$$

$$x_2 + 2z_2 + 7 = 0$$

هما معادلتا المستقيم المطلوب .

(3.15) – التناظر بالنسبة الى مستقيم :

تعريف : نقول عن النقطتين $M_2(x_2,y_2,z_2), M_1(x_1,y_1,z_1)$ انهما متناظران بالنسبة الى المستقيم D ، اذا كان هذا المستقيـــم يقطع القطعة المستقيمة M_1M_2 ويعامدها في منتصفها.



شكل (٣٣)

فاذا كان المستقيم D معينا بجملة المعادلتين :

$$P(x,y,z) \equiv 0$$
$$Q(x,y,z) \equiv 0$$

وبالتالي فان منحى هذا المستقيم معلوم هو $\vec{V}(u,v,w)$

وبما أن $\overrightarrow{M_1M_2}$ يعامد $\vec{V}$ فان :

$$\vec{V}\cdot\overrightarrow{M_1M_2} \quad u(x_2-x_1)+v(y_2-y_1)+w(z_2-z_1)=0 \qquad (3.15.1)$$

وبما ان منتصف M_1M_2 تقع على المستقيم D فاحداثياتهـــا تحقق معادلتي المستقيم أي :

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{y_1+y_2}{2}\,,\ \frac{z_1+z_2}{2}\right) \equiv 0 \qquad ((3.15.2)$$

$$Q\left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{y_1+y_2}{2}\,,\ \frac{z_1+z_2}{2}\right) \equiv 0 \qquad (3.15.3)$$

تستخدم هذه المعادلات الثلاث لايجاد نظيرة نقطة او نظير مستو او نظير مستقيم بالنسبة الى المستقيم D .

مثال (١) :

عيّن نظير النقطة $M_1\ (1,2,-2)$ بالنسبة للمستقيم :

$$D \left| \begin{array}{l} x+2y-1=0 \\ 2x+y+z-4=0 \end{array} \right.$$

الحل :

نفرض $M_2(x,y,z)$ نظيرة M_1 بالنسبة للمستقيم D

ولنوجد أولا منحى هذا المستقيم :

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

بتطبيق (3.1.5.1),(3,15,2),(3,15,3) يكون :

$$2(x-1)-(y-2)-3(z+2)=0 \qquad (1)$$

$$\frac{1+x}{2}+2\,\frac{2+y}{2}-1=0 \qquad (2)$$

$$2\,\frac{1+x}{2}+\frac{2+y}{2}+\frac{-2+z}{2}-4=0 \qquad (3)$$

باصلاح المعادلات الثلاثة نجد :

$$2x-y-3z-6=0$$
$$x+2y+3 \quad =0$$
$$2x+y+z-6 \quad =0$$

بحل جملة هذه المعادلات نجد :

$$z=\frac{12}{7}\ ,\quad y=-\frac{24}{7}\ ,\quad x=\frac{27}{7}$$

أي نظير M_1 هي النقطة :

$$M_2\left(\frac{27}{7}\ ,\ -\frac{24}{7}\ ,\ \frac{12}{7}\right)$$

مثال(٢) :

اوجد نظير المستوي :

$$P \equiv x+y-2z+1=0$$

بالنسبة الى المستقيم D المعين بالمعادلتين :

$$x-z=0$$
$$x+y+2=0$$

الحل :

نوجد منحى المستقيم D فنجد : $\vec{V}(1,-1,1)$

ولتكن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة ما من المستوي P ولتكن $M_2(x,y,z)$ نظيرتها بالنسبة الى المستقيم D :

بتطبيق (3.15.1) , (3.15.2) , (3,15.3) نجد :

$$(x-x_1)-(y-y_1)+(z-z_1)=0$$

$$\frac{x+x_1}{2}-\frac{(z+z_1)}{2}=0$$

$$\frac{x+x_1}{2}+\frac{y+y_1}{2}+2=0$$

باظلاح هذه المعادلات الثلاثة نجد :

$$-x_1+y_1-z_1=-x+y-z \qquad (1)$$
$$x_1-z_1 = z-x \qquad (2)$$
$$x_1+y_1 = -x-y-4 \qquad (3)$$

تحسب x_1, y_1, z_1 بدلالة x, y, z فنجد :

$$x_1=-\frac{1}{3}(x+2y-2z+4)$$

$$y_1=-\frac{1}{3}(2x+y+2z+8)$$

$$z_1=\frac{1}{3}(x-2y-z-4)$$

لكن بما أن M_1 نقطة من P اذن :

$$x_1+y_1-2z_1+1=0$$

بتعويض x_1, y_1, z_1 بما يساويها في المعادلة الاخيرة نجد :

$$5x-y+2z+9=0$$

هي معادلة المستوي المطلوب .

تماريــــــن (٢)

١- أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم :

$$3x-y+2z-1=0 \quad , \quad x+2y-z-2=0$$

١- على كل من المستويات الاحداثية .

٢- على المستوي :

$$3x+2y+z=0$$

٢- اوجد معادلتي المستقيم الذي يقطع المستقيم :

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{3}$$

ويعامده ،ويقع في المستوي :

$$3x+y-z-1=0$$

٣- اوجد معادلات المستقيمات التي تقطع المستقيم :

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y+6}{2}=\frac{z+7}{1}$$

وتصنع معه زاوية قدرها 60 درجة وتقع في المستوي :

$$x+y+2z+1=0$$

٤- اوجد معادلتي المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(1,-1,2)$ ويقطع كلا من المستقيمين :

$$D_1 \left| \begin{array}{l} x-y-z+1=0 \\ 2x+4y+z-4=0 \end{array} \right. \qquad D_2 \left| \; x=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{3} \right.$$

ثم احسب طول القطعة المحدودة بنقطتي تقاطع هذا المستقيم مع المستقيمين D_2, D_1 .

٥- اوجد معادلتي المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(2,-6,5)$ ويعامد المستوي المار بالنقاط :

$$B(2,-3,-4) \;,\; C(-3,2,\tfrac{7}{2}) \;,\; D(\tfrac{5}{2},1,-1)$$

٦- أثبت ان المستقيم :

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{4}$$

يوازي المستوي :

$$2x+3y-6z+7=0$$

ثم احسب البعد الكائن بين المستقيم والمستوي .

٧- اوجد نقطتي تقاطع المستقيم الواصل بين النقطتين $B(-2,17,9)$ $A(-1,12,7)$ مع السطح $11x^2-5y^2+z^2=0$

٨- احسب طول العمود النازل من النقطة $A(-3,1,5)$ على المستوي : $6x-3y+2z-38=0$

ثم عيّن احداثيات مسقط النقطة A على هذا المستوي .

٩- اوجد معادلة المستوي الذي يحوي المستقيمين :

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{3} \quad , \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3}$$

ثم احسب اقصر بعد بين المستقيمين .

١٠- اثبت أن المستقيمين :

$$x-4 = \frac{y-5}{3} = \frac{z+6}{-4} \quad , \quad x-3 = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{3}$$

متقاطعان وعيّن نقطة تقاطعهما ، ثم احسب طول العمود النازل من النقطة $A(3, -2, 3)$ على المستوي الحاوي لهذين المستقيمين .

١١- اوجد معادلة المستوي الذي يحوي المستقيم :

$$x+y+z-3=0 \quad , \quad 3x+5y+7z-5=0$$

ويوازي المستقيم :

$$4x+y+z=0 \quad , \quad 2x-3y-5z=0$$

١٢- اوجد معادلتي العمود المشترك للمستقيمين :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z \quad , \quad x = y+4 = \frac{z}{2}$$

واحسب أقصر بعد بينهما .

١٣- احسب حجم رباعي وجوه رؤوسه النقاط :

$$A(1,2,3) \ , \ B(2,3,5) \ , \ C(-2,-1,2) \ , \ D(3,0,-3)$$

١٤- احسب حجم رباعي وجوه وجوهه المستويات الاربعة الآتية :

$$6x-4y-3z-12=0 \ , \ z=0 \ , \ y=0 \ , \ x=0$$

١٥- لدينا النقاط الثلاث :

$$A(3,2,1) \ , \ B(-2,0,-3) \ , \ C(0,0,-2)$$

والنقطة P متحولة في الفراغ ، اوجد المحل الهندسي للنقطة P بحيث يكون حجم رباعي الوجوه $PABC$ يساوي دائما 5.

١٦- اوجد بعد النقطة $A(1,-2,3)$ عن المستوي $x+y+z-5=0$ مقاسا باتجاه يوازي المستقيم :

١٧- اثبت أن المستويات الثلاثة :

$$P_1 \equiv 12x-15y+16z-28=0$$
$$P_2 \equiv 6x+6y-7z-8=0$$
$$P_3 \equiv 2x+35y-29z+12=0$$

تتلاقى في خط مستقيم واحد واثبت ايضا أن نقطة تقاطع المستقيم :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

مع المستوي الثالث هي على بعدين متساويين عن المستويين الاول والثاني .

١٨- اوجد معادلات المستويات التي تحوي المستقيم :

$$x - y + 2z = 0 \quad , \quad 3x + y + z - 5 = 0$$

يميل بزاوية 45 درجة على المحور oz ثم أوجد أيضا معادلة المستوي الذي يمر بالمستقيم المعلوم ،ويوازي المحور oz ثم احسب طول اقصر بعد بين المستقيم المعلوم والمحور oz •

١٩- اذا كان المستوي $4x-3y+7z = 0$ افقيا اوجد معادلتي المستقيم الرأسي الذي يمر بنقطة الاصل ثم اوجد جيوب تمام توجيه منحى المستقيم الذي يقع في المستوي : $2x+y-5z=0$ والذي ميله على المستوي الافقي اعظم ما يمكن •

٢٠- اوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقاط (5,7,10)(0,4,1)(2,0,3) ثم اوجد معادلتي المستقيم الواقع في هذا المستوي والذي يقطع المحور oz ويكون ميله على المستوي oxy اعظم ما يمكن •

٢١- عيّن نقطة على المستقيم :

$$x - y + z + 1 = 0$$
$$2x + y - z + 2 = 0$$

بحيث يتساوى بعداها عن المستويين المتوازيين :

$$2x - y + 2z - 1 = 0$$
$$2x - y + 2z + 9 = 0$$

٢٢- اوجد نظير النقطة $A(-2,1,3)$ بالنسبة للمستوي :

$$x + 2y + 3z - 2 = 0$$

٢٣- اوجد نظير المستوي :

$$P \equiv x - 2y + z - 4 = 0$$

بالنسبة للمستوي :

$$Q \equiv 2x + y - z + 1 = 0$$

٢٤- اوجد نظير المستقيم :

$$D \left| \begin{array}{l} 2x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right.$$

بالنسبة للمستوي :

$$P \equiv x + 2y + 3z - 1 = 0$$

٢٥- ١) ارسم المستقيمين :

$$D_1 \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2 \end{array} \right. \qquad D_2 \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

٢) اكتب معادلات المستقيمات التي تقطع هذين المستقيمين وتمنع معهما زاويتين متساويتين •

الفصل الرابع

السطوح والمنحنيات في الفراغ

(4.1) – تعريف السطح :

هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي تحقق خاصة معينة تدعى الخاصة المميزة لهذا السطح .

فمجموعة نقاط الفراغ التي تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة تؤلف سطح كرة ،كما أن مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد بعدا ثابتا عن مستو معلوم تؤلف سطحا مستويا يوازي المستوي المعلوم .

(4.2) – معادلة السطح:

اذا استطعنا التعبير عن الخاصة المميزة للسطح بعلاقة تربط بين احداثيات نقطة متحولة على هذا السطح في جميع أوضاعها ،فهذه العلاقة تدعى بمعادلة السطح فنكتب :

$$f\ (x,y,z) = 0 \qquad (4.2.1)$$

فكل نقطة (x,y,z) من هذا السطح تحقق احداثياتها المعادلة (4.2.1) ،وكل نقطة تحقق احداثياتها هذه المعادلة هي

نقطة من السطح • المعادلة (4.2.1) تسمى بالمعادلة الديكارتية للسطح بالشكل الضمني • واذا استطعنا حساب أحد المتحولات z مثلا من المعادلة (4.2.1) بدلالة المتحولين الآخرين نحصل على المعادلة :

$$z = \Phi(x,y) \qquad (4.2.2)$$

هذه المعادلة تدعى بالمعادلة الديكارتية للسطح بالشكل الظاهري • ويمكن أن نعبر عن الخاصة المميزة لسطح ما S بمعادلات من الشكل :

$$x = f_1(u,v), y = f_2(u,v), z = f_3(u,v) \qquad (4.2.3)$$

حيث u متحول مجموعته الكلية U و v متحول متجموعته الكلية V • فاذا قابل كل عنصر (u,v) من المجموعة UxV ثلاثي مرتب (x,y,z) تمثله النقطة M(x,y,z) من السطح S وقابل كل نقطة مثل M(x,y,z) من السطح S عنصر وحيد (u,v) من المجموعة UxV عندئذ نقول ان المعادلات (4.2.3) تشكل المعادلات الوسيطية للسطح (S) ونسمي المتحولين u,v وسيطين ويمكن ان نرى بسهولة ان جملة المعادلات (4.2.3) تمثل سطحا اذ يمكن حساب v,u من المعادلتين

$$x = f_1(u,v), \quad y = f_2(u,v)$$

بدلالة y,x وتعويضهما في المعادلة الثالثة فنحصل على المعادلة :

$$z = f_3(x,y)$$

وهي المعادلة الديكارتية للسطح بالشكل الظاهري •

كما يمكن الانتقال من الشكل الظاهري لمعادلة السطح الى الشكل الوسيطي ، وذلك بفرض :

$$y = v, \qquad x = u$$

فنحصل على المعادلات الوسيطية :

$$z = \Phi(u,v), \quad y = v, \quad x = u$$

مثال :

لنأخذ الكرة (S) التي مركزها في مبدأ الاحداثيات o ونصف قطرها R • ولنفرض oxyz جملة محاور متعامدة في o ، ولتكن M(z,y,x) نقطة من سطح الكرة (S) •

ولتكن M'(x,y,o) المسقط القائم للنقطة M على المستوي xoy و u الزاوية الموجهة من المحور ox الى المحور الموجه من o الى M' $(o < u \leq 2\pi)$ •

ولتكن v الزاوية بين المحور oz والمحور الموجه من o الى M $(o < v < \pi)$ فالاحداثيات الكروية للنقطة M هي :

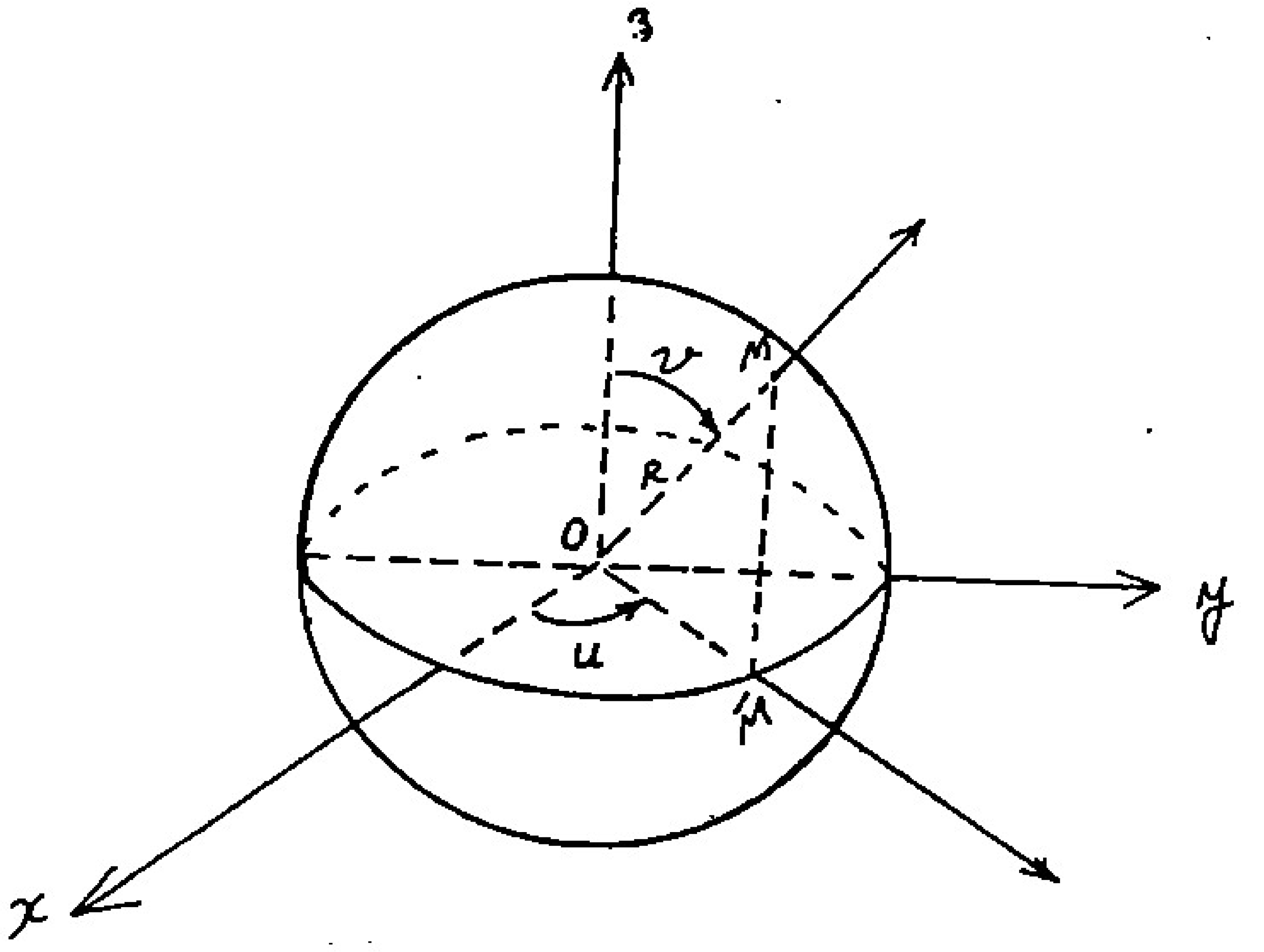
$$x = R \sin v . \cos u$$

$$y = R \sin v . \sin u$$

$$z = R \cos v$$

فالقول : ان المعادلات الثلاثة السابقة هي المعادلات الوسيطية للكرة، لانه اذا حذفنا الوسيطين v,u بين هذه المعادلات نحصل على المعادلة

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



شكل (٣٤)

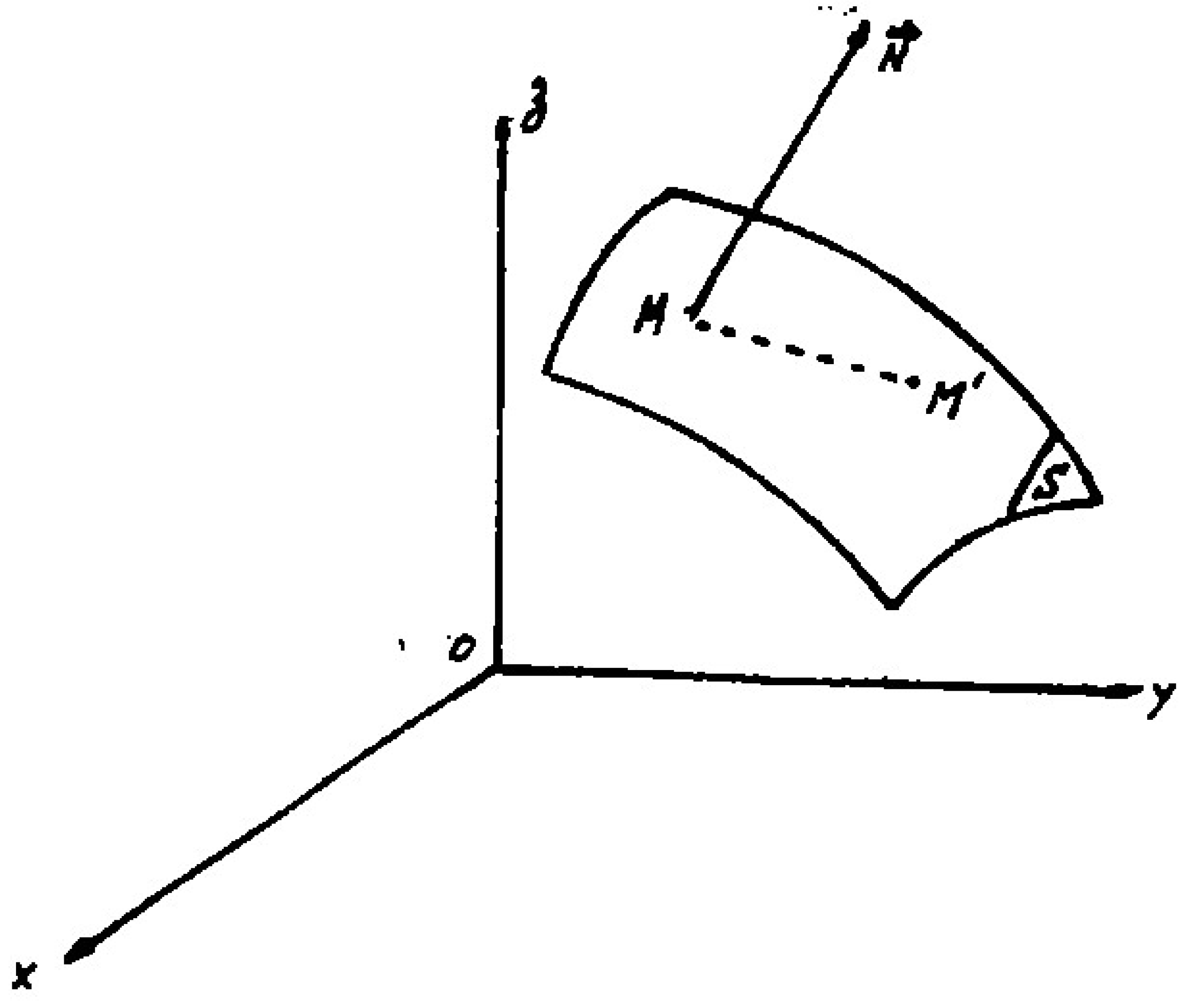
وهي المعادلة الديكارتية للكرة، وسرى ذلك مفصلا في بحث الكرة.

(3 4) ـ معادلات المستقيم الناظم والمستوي المماس لسطح.

ليكن السطح (S) معينا بالمعادلة الديكارتية $f(x,y,z)=0$ ولتكن $M(x,y,z)$ نقطة من هذا السطح، و M' نقطة من السطح قريبة جداً من M . احداثياتها $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$

فاذا كانت Δz و Δy و Δx مقادير لا متناهية في الصغر، فحسب دستور التزايدات المحدودة في التحليل الرياضي نكتب

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f(x,y,z) + f'_x\,\Delta x + f'_y\cdot\Delta y + f'_z\,\Delta z$$



شكل (٣٥)

وبما أن M و M' تنتميان للسطح (S) يكون :

$$f'_x\,\Delta x + f'_y\,\Delta y + f'_z\,\Delta z = 0 \qquad (4.3.1)$$

نلاحظ ان هذه العلاقة هي عبارة تحليلية للجداء السلمي لشعاعين متعامدين، الاول هو

$$\overrightarrow{MM'} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k}$$

والثاني هو :

$$\vec{N} = f'_x\,\vec{i} + f'_y\,\vec{j} + f'_z\,\vec{k}$$

وبما أن M' قريبة جدا من M فالشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يمثل منحى المماس للسطح عند النقطة M وبالتالي يكون الشعاع $\vec{N}$ العمودي عليه في هذه النقطة يمثل منحى الناظم على هذا السطح ويمكن أن نقول

ان امثال توجيه منحى الناظم على السطح (S) عند النقطة $M(x,y,z)$ هي المشتقات الجزئية لمعادلة السطح.

فاذا كانت (X,Y,Z) نقطة متحولة من المستقيم الناظم عند النقطة M فان معادلة المستقيم الناظم تكون :

$$\frac{X-x}{f'_x} = \frac{Y-y}{f'_y} = \frac{Z-z}{f'_z} \qquad (4.3.2)$$

أما المستوي المماس للسطح (S) عند النقطة $M(x,y,z)$ فهو بالتعريف المستوي المار من M ويعامد الناظم للسطح في هذه النقطة ، فاذا كانت (X,Y,Z) نقطة متحولة من المستوي المماس فمعادلة هذا المستوي هي :

$$(X-x)f'_x+(Y-y)f'_y+(Z-z)f'_z=0 \qquad (4.3.3)$$

مثال(١) :

ليكن السطح (S) معينا بالمعادلة :

$$x^3+2xy+z^3-2=0$$

أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلتي المستقيم الناظم لهذا السطح عند النقطة $M_0(1,0,1)$.

الحل :

لنوجد أمثال توجيه منحى الناظم للسطح عند هذه النقطة:

ومن أجل النقطة $M_0(1,0,1)$ يكون :

$$f'_{x_0}=3 \;,\; f'_{y_0}=2 \;,\; f'_{z_0}=3$$

ومعادلة المستوي المماس هي :

$$(x-1)3+(y)(2)+(z-1)(3)=0$$
$$3x+2y+3z-6=0$$

ومعادلتا المستقيم الناظم في هذه النقطة هما :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$$

مثال(٢) :

عيّن نقاطا من السطح السابق بحيث يكون المستوي المماس عندها موازيا للمستوي xoy ثم اكتب معادلة المستوي المماس للسطح عند هذه النقاط .

الحل :

ان أمثال توجيه منحى الناظم على المستويات المطلوبة هي $(0,0,1)$ وأمثال توجيه منحى الناظم في النقاط $M(x,y,z)$ من السطح هي f'_x,f'_y,f'_z فهذه الامثال يجب ان تتناسب مع $(0,0,1)$:

$$\frac{3x^2+2y}{0} = \frac{2x}{0} = \frac{3z^2}{1}$$

أي :

$$2x = 0$$
$$3x^2+2y = 0$$

ومنه :

$$y = 0 \quad , \quad x = 0$$

وبما ان النقاط المطلوبة $M(x,y,z)$ تنتمي للسطح (S)

فيجب أن تحقق احداثياتها معادلة هذا السطح اي :

$z^2 = 2$ ومنه $z = \sqrt{2}$

اذن هناك نقطة وحيدة من السطح تحقق المطلوب هي :

$$M_0(0,0,\sqrt{2})$$

وعندها تكون معادلة المستوي المماس :

$$z = \sqrt{2}$$

(4.4) ـ معادلات المستقيم الناظم والمستوي المماس لسطح معين بمعادلاته الوسيطية :

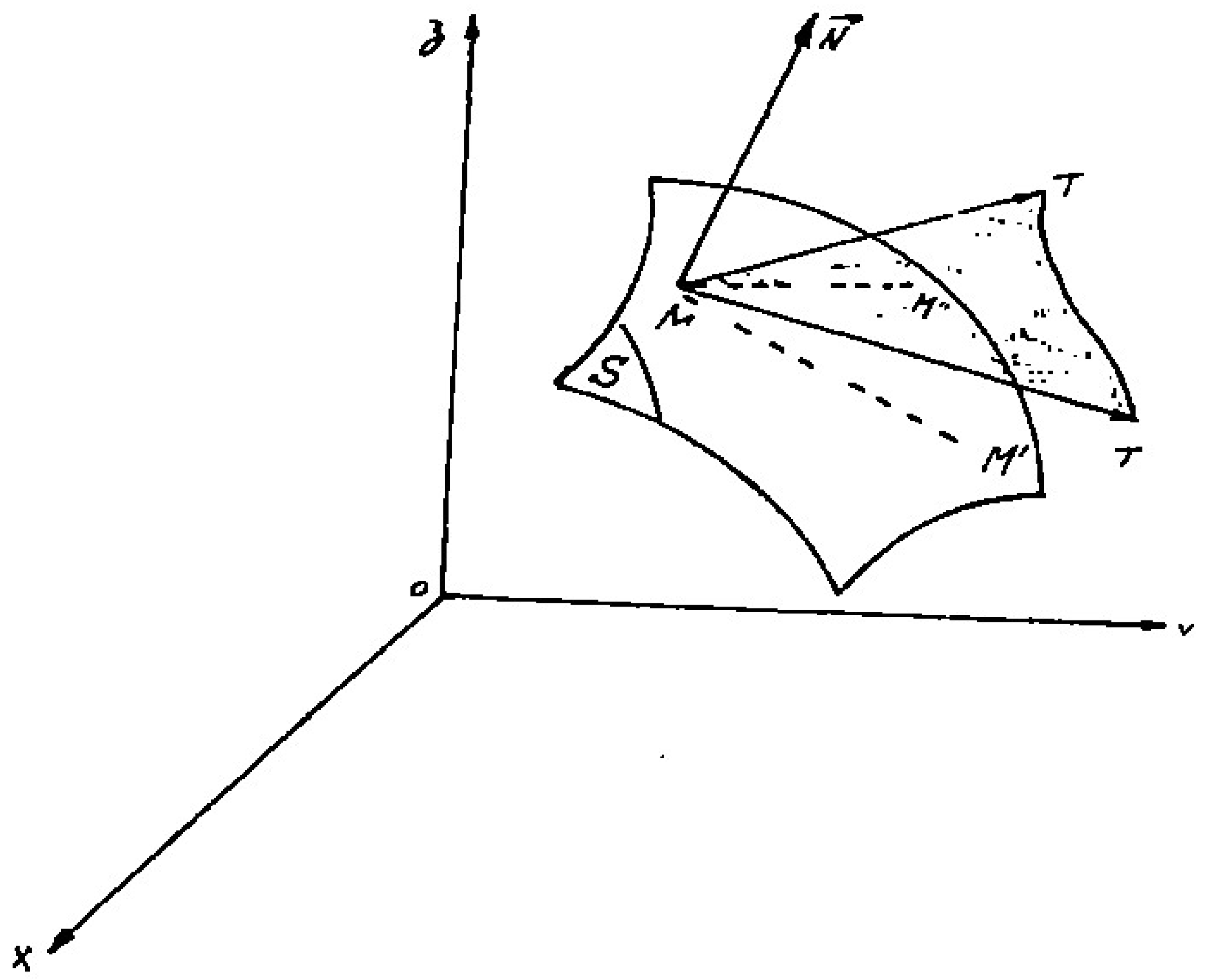
ليكن السطح (S) معينا بمعادلاته الوسيطية :

$$x = f_1(u,v) \quad , \quad y = f_2(u,v) \quad , \quad z = f_3(u,v)$$

ولتكن $M(x,y,z)$ من السطح ،ولنعط للوسيط u تزايدا صغيرا Δu (مع بقاء v ثابتا) فتأخذ z,y,x تزايدات قدرها $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ على الترتيب فنحصل على النقطة :

$$M'(x+\Delta x \quad y+\Delta y \quad z+\Delta z)$$

القريبة جدا من النقطة M



شكل (٣٦)

فالشعاع $\overrightarrow{MM'}(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ يمثل منحى القاطع MM' للسطح S

وعندما تكون M' قريبة من M على السطح فان منحى القاطع يصبح منحى المماس $\overrightarrow{MT_1}$ للسطح وعندئذ يمكن اعتبار

$\Delta x = dx \quad \Delta y = dy \quad \Delta z = dz$ أي $(dx \quad dy \quad dz)$

هي أمثال توجيه منحى المماس $\overrightarrow{MT_1}$ للسطح عند M ولكن

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du$$

يمكن استبدال امثال توجيه المماس $\overrightarrow{MT_1}$ بما يتناسب معهـا فنكتب :

$$\overrightarrow{MT_1}\left(\frac{\partial x}{\partial u} \;,\; \frac{\partial y}{\partial u} \;,\; \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

أي أن x'_u, y'_u, z'_u يمكن اعتبارها امثال توجيه منحنى المماس $\overrightarrow{MT_1}$ باتجاه 'M وبنفس الطريقة السابقة اذا كان u ثابتا و v متحولا نحصل على الشعاع :

$$\overrightarrow{MT_2}\left(\frac{\partial x}{\partial v} \;,\; \frac{\partial y}{\partial v} \;,\; \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

أي ان x'_v, y'_v, z'_v يمكن اعتبارها أمثال توجيه منحى المماس $\overrightarrow{MT_2}$ باتجاه النقطة "M .

والمستوي المؤلف من الشعاعين $\overrightarrow{MT_1}$ و $\overrightarrow{MT_2}$ هو مستو يمس السطح عند النقطة M ومنحى الناظم عند النقطة M يتعين عندئذ بالشعاع :

$$\vec{N} = \overrightarrow{MT_1} \wedge \overrightarrow{MT_2}$$

أي :

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = (y'_u z'_v - z'_u y'_v)\,\vec{i} + (z'_u x'_v - x'_u z'_v)\,\vec{j} + (y'_u z'_v - z'_u y'_v)\,\vec{k}$$

واذا سمينا r, q, p مركبات $\vec{N}$ في اتجاهات المحاور الثلاثـة يكون :

$$\vec{N} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + r\,\vec{k}$$

فمعادلة المستوي المماس عند النقطة M(x, y, z) تصبح :

$$(X-x)p + (Y-y)q + (Z-z)r = 0 \qquad (4.4.1)$$

حيث (X, Y, Z) نقطة متحولة على المستوي المماس . ومعادلتا المستقيم الناظم عند هذه النقطة هما :

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{r} \qquad (4.4.2)$$

حيث (X, Y, Z) نقطة متحولة على الناظم .

مثال :

ليكن السطح (S) معينا بالمعادلات الوسيطية :

$$x = \lambda . \sin\varphi \;,\; y = \lambda . \cos\varphi \;,\; z = \lambda$$

اوجد معادلات المستوي المماس والمستقيم الناظم عند نقطـة من السطح توافق :

$$\lambda = 2 \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

الحل

ان احداثيات النقطة M_0 من السطح الموافقة لهاتين القيمتين هي

$$z_0 = 2 \ , \ y_0 = 1 \ , \ x_0 = \sqrt{3}$$

ولتعيين امثال توجيه محور الناظم عند هذه النقطة نوجد القيم العددية للمشتقات الجزئية لكل من z,y,x بالنسبة للوسيطين λ ، φ على الترتيب .

$$x'_\lambda = \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ y'_\lambda = \cos\varphi = \frac{1}{2} \ , \ z'_\lambda = 1$$

$$x'_\varphi = \lambda\cos\varphi = 1 \ , \ y'_\varphi = -\lambda\sin\varphi = -\sqrt{3} \ , \ z'_\varphi = 0$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

فمعادلة المستوي المماس هي .

$$\sqrt{3}(x-\sqrt{3}) + (y-1) - 2(z-2) = 0$$
$$\sqrt{3}\,x + y - 2z = 0$$

ومعادلتا المستقيم الناظم هما :

$$\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

(4 5) ـ التوابع المتجانسة ومطابقة اولر

نقول عن التابع $f(x,y,z)$ انه تابع متجانس من الدرجة اذا حقق المطابقة الآتية

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^n f(x,y,z) \qquad (4.5.1)$$

مهما كان العدد السلمي λ .

مثال(1)

ان التابع
$$f(x,y,z) \equiv x^3 + 3xy^2 + yz^2$$
هو تابع متجانس من الدرجة الثالثة لان

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^3 x^3 + 3\lambda^3 xy^2 + \lambda^3 yz^2$$
$$\equiv \lambda^3 (x^3 + 3xy^2 + yz^2)$$
$$\equiv \lambda^3 f(x,y,z)$$

اذا اشتققنا طرفي المطابقة (4 5 1) بالنسبة الى λ يكون:

$$x f'_{(\lambda x)} + y f'_{(\lambda y)} + z f'_{(\lambda z)} \equiv n \lambda^{n-1} f(x,y,z)$$

فاذا جعلنا $\lambda = 1$ في هذه المطابقة نجد :

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z \equiv n f(x,y,z) \qquad (4.5.2)$$

هذه المطابقة تدعى مطابقة اولر في التوابع المتجانسة .

مثال(٢):

تحقق من صحة مطابقة أولر في التابع المذكور في المثال(١) :

$$f'_x = 3x^2 + 3y^2 \quad , \quad f'_y = 6xy + z^2 \quad , \quad f'_z = 2yz$$

$$x.f'_x + yf'_y + zf'_z = x(3x^2 + 3y^2) + y(6xy + z^2) + z(2yz)$$
$$\equiv 3x^3 + 9xy^2 + 3yz^2$$
$$\equiv 3.f(x,y,z)$$

(4.6) ـ السطوح المتجانسة وخواصها :

تعريف : نقول عن السطح (S) ذي المعادلة $f(x,y,z) = 0$ انه متجانس من الدرجة n اذا كان الطرف الايسر من معادلته تابعـــا متجانسا من الدرجة n .

خواص السطح المتجانس :

١ـ كل سطح متجانس يمر من نقطة الاصل 0 .

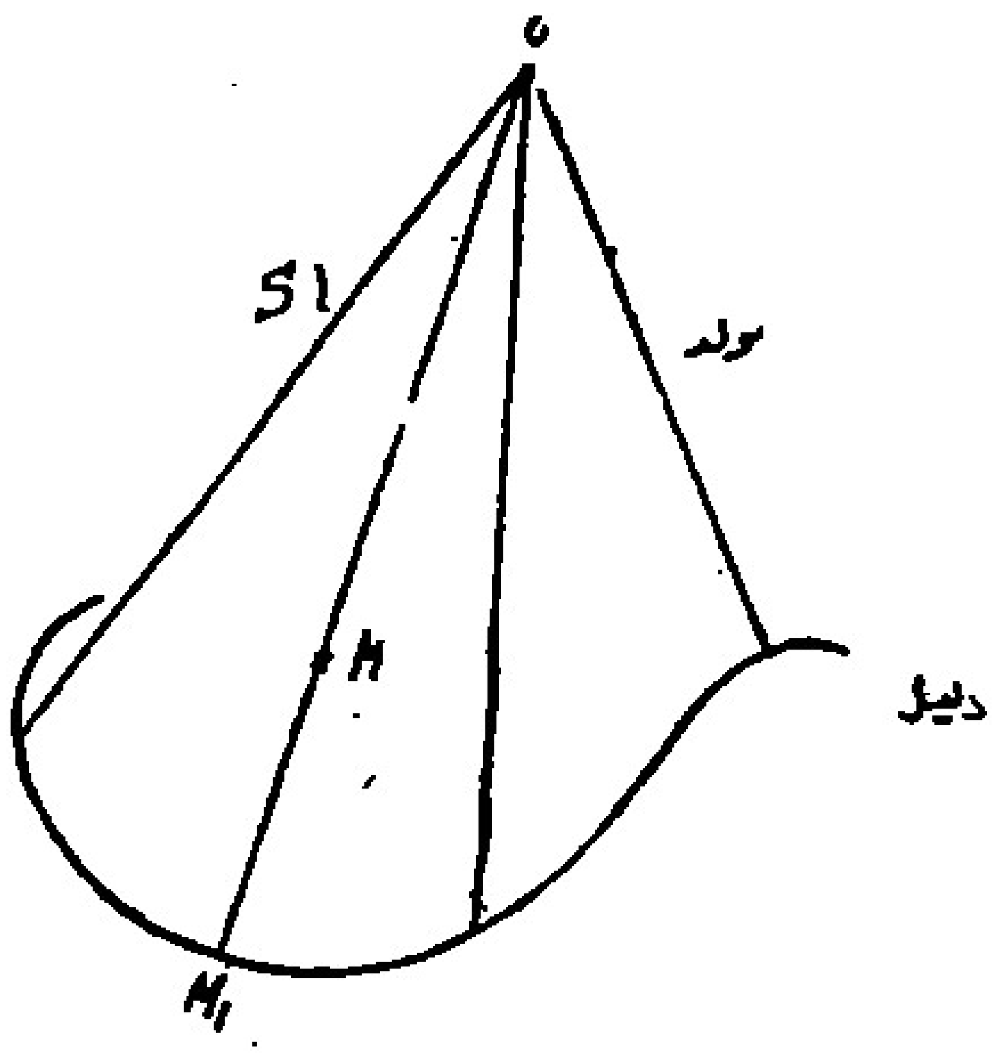
من المطابقة : $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \equiv \lambda^n.f(x,y,z)$

من اجل $\lambda = 0$ تصبح : $f(0,0,0,) = 0$

أي نقطة الاصل تحقق معادلة السطح وبالتالي السطح يمر من 0 .

٢ـ كل سطح متجانس هو سطح مخروطي .

لتكن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة من السطح المتجانس(S) و 0 نقطة من السطح حسب الخاصة (١) ولنأخذ نقطة $M\ (x,y,z)$ متحولة على المستقيم OM_1 فالمعادلات الوسيطية لهـــذا المستقيم هي : $x = \lambda x_1 \quad , \quad y = \lambda y_1 \quad , \quad z = \lambda z_1$



شكل (٣٧)

لنعوض (x,y,z) احداثيات M في معادلة السطح المتجانس (S) نجد :

$$f(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1) \equiv \lambda^n.f(x_1,y_1,z_1)$$

بما ان (x_1,y_1,z_1) نقطة من السطح فان :

$$f(x_1,y_1,z_1) = 0$$

وبالتالي :

$$f(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1) \equiv 0$$

مهما كانت قيمة الوسيط λ .

أي أن النقطة M التي هي من المستقيم بالفرض تقع في جميع اوضاعها على السطح اي أن السطح S تولده مستقيمات مارة من مبدأ الاحداثيات O وبالتالي هو سطح مخروطي ذروته مبدأ الاحداثيات .

٣- ان المشتقات الجزئية لمعادلة سطح متجانس من الدرجة n تمثل سطوحا متجانسة أيضا من الدرجة n-1 .

بالحقيقة اذا اشتققنا طرفي المطابقة :

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv \lambda^n . f(x,y,z)$$

بالنسبة الى المتحول x نجد :

$$\lambda f'_x(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv \lambda^n f'_x(x,y,z)$$

$$f'_x(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv \lambda^{n-1} . f'_x(x,y,z)$$

وهذا يعني أن التابع : $f'_x(x,y,z)$

هو تابع متجانس من الدرجة n-1

وبالتالي السطح الذي معادلته : $f'_x(x,y,z)=0$

هو سطح متجانس من الدرجة n-1 ونحصل على نتائج مماثلة اذا تم الاشتقاق بالنسبة الى y أو z .

(4.7) ـ معادلة المستوي المماس لسطح متجانس :

لتكن $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من السطح المتجانس (S) الذي معادلته :

$$f(x,y,z)=0$$

ان معادلة المستوي المماس لسطح ما حسب (4.3.3) هي :

$$(x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}+(z-z_0)f'_{z_0}=0$$

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}-(x_0f'_{x_0}+y_0f'_{y_0}+z_0f'_{z_0})=0$$

$$x_0f'_{x_0}+x_0f'_{y_0}+z_0f'_{z_0}\equiv nf(x_0,y_0,z_0)$$

حسب مطابقة أولر ، لكن : $f(x_0,y_0,z_0)=0$

لان M_0 من السطح (S) ، اذن :

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0 \qquad (4.7.1)$$

هي معادلة المستوي المماس لسطح متجانس .

ويمكن أن نرى بسهولة ان هذه المعادلة هي معادلة مستو يمر من O ، وهذه نتيجة طبيعية في سطح مخروطي (متجانس) لان المستوي المماس للسطح عند M_0 يمس هذا السطح على طول المولد OM_0 .

مثال :

اوجد معادلة المستوي المماس للسطح المتجانس (S) المعين بالمعادلة :

$$2x^3-yz^2-2z^3=0$$

عند النقطة $M_0(1,0,1)$

الحل :

ان معادلة المستوي المماس هي من الشكل :-

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0$$

$$f'_x = 6x^2 = 6 \quad , \quad f'_y = -z^2 = -1 \quad , \quad f'_z = -2yz - 6z^2 = -6$$

فمعادلة المستوي المماس هي : $6x - y - 6z = 0$

(4.8) ـ المنحنيات في الفراغ :

وجدنا في الفصل الثالث أن المستقيم في الفراغ يتعين بتقاطع سطحين مستويين وان معادلة المستقيم تتألف من جملة معادلتي المستويين المتقاطعين . كذلك يمكن اعتبار المنحني في الفراغ هو خط تقاطع سطحين مختلفين ،فيمكن أن نعرف المنحني في الفراغ بأنه المحل الهندسي لنقاط تقاطع سطحين S_1, S_2 .

فاذا كانت معادلة السطح الاول S_1 هي :

$$f(x,y,z) = 0$$

وكانت معادلة السطح الثاني S_2 هي : $g(x,y,z) = 0$

فكل نقطة مثل $M(x,y,z)$ تنتمي لمنحني التقاطع C تحقق احداثياتها جملة المعادلتين :

$$C \left| \begin{array}{l} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{array} \right. \qquad (4.8.1)$$

لذلك نقول : ان جملة المعادلين (4.3.1) تؤلف معادلتي المنحني C بالشكل الديكارتي . ويمكن أن تعطى معادلات المنحني C بالفراغ بالشكل الوسيطي :

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \qquad (4.8.2)$$

حيث t وسيط متحول . فاذا حسبنا t من احدى هذه المعادلات بدلالة احد المتحولات وعوضنا قيمتها في المعادلتين الباقيتين نحصل على جملة معادلتين ديكارتيتين من الشكل (4.8.1) .

وبالعكس يمكن الانتقال من الشكل الديكارتي (4.8.1) الى الشكل الوسيطي (4.8.2) باختيار $t=x$ مثلا ثم حساب y و z بدلالة الوسيط فنحصل على ثلاثة معادلات وسيطية .

مثال (1) :

ليكن المنحني C معينا بالمعادلات الوسيطية :-

$$x = t^2 + 1 \quad , \quad y = t - 1 \quad , \quad z = -t^2$$

اوجد معادلتي هذا المنحني بالشكل الديكارتي :-

الحل :

نحسب t من المعادلة الثانية فنجد $t = y + 1$

بالتعويض في المعادلتين الباقيتين نحصل على

$$z = -(y+1)^2 , x = (y+1)^2 + 1$$

فجملة هاتين المعادلتين تؤلف المعادلتين الديكارتيتين للمنحني .

(4.9) ـ مساقط منحن في الفراغ على المستويات الاحداثية :

يمكن تصور المنحني في الفراغ بمعرفة مساقطه على المستويات الاحداثية فاذا كان المنحني C معطيا بمعادلتين ديكارتيتين :

$$g(x,y,z) = 0 \;,\; f(x,y,z) = 0$$

ولمعرفة مسقط هذا المنحني على المستوي xoy مثلا نحسب z من احدى المعادلتين ونعوضها في الثانية فنحصل على معادلة من الشكل :

$$F(y,z) = 0$$

هي معادلة المسقط على المستوي xoy وبالمثل ،لمعرفة مسقط هذا المنحني على المستوي xoz نحذف y بين المعادلتين ،فنحصل على معادلة من الشكل $G(x,z) = 0$ هي معادلة المسقط على هذا المستوي ،كذلك الامر بالنسبة للمسقط على المستوي yoz فنحصل على معادلة من الشكل :

$$H(y,z) = 0$$

اما اذا كان المنحني معطيا بالمعادلات الوسيطية (4.8.2) فان حذف t من المعادلتين الاولى والثانية يعطي معادلة من الشكل:

$$F(x,y) = 0$$

هي معادلة المسقط على المستوي xoy .

بنفس الطريقة نحصل على معادلة المسقط على المستويين الاحداثيين الاخرين . ففي المثال السابق ،عندما حذفنا t بين المعادلتين الاولى والثانية حصلنا على المعادلة :

$$x = (y+1)^2 + 1$$

وهي تمثل قطعا مكافئا في المستوي xoy .

وعند حذف t بين المعادلتين الثانية والثالثة حصلنا على المعادلة :

$$z = -(y+1)^2$$

وهي تمثل قطعا مكافئا ايضا يقع في المستوي xoy .

اذا حذفنا t بين المعادلتين الاولى والثالثة نحصل على :

$$x = -z + 1$$

وهي تمثل مستقيما يقع في المستوي xoz .

(4.10) ـ معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظم لمنحن في الفراغ:

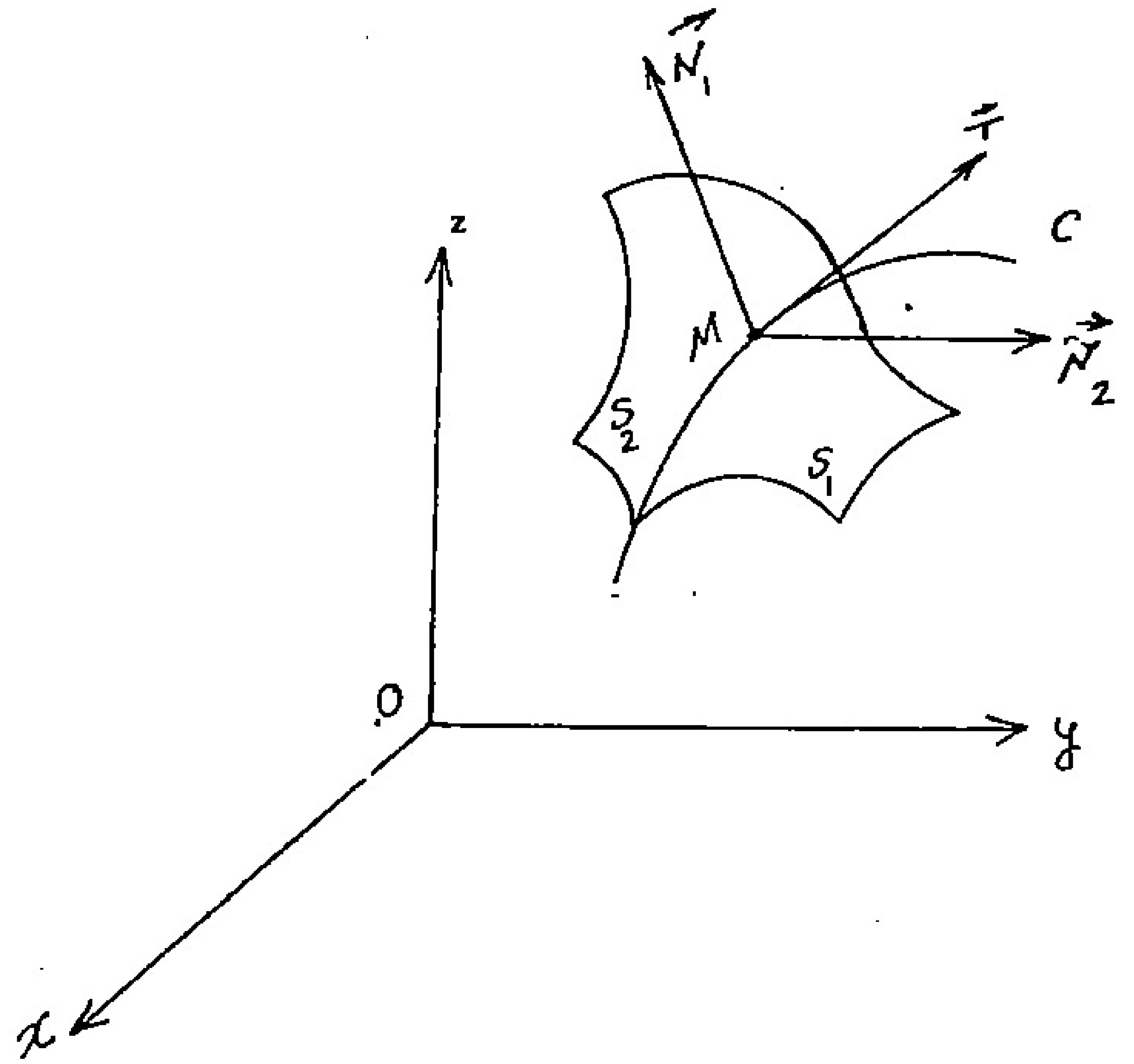
الحالة الاولى :

اذا كان المنحني C معينا بتقاطع سطحين S_1, S_2 معادلتاهما .

$$f(x,y,z)=0 \quad , \quad g(x,y,z)=0$$

ان المماس للمنحني C في النقطة $M(x,y,z)$ من هذا المنحني هو مماس بآن واحد للسطح S_1 وللسطح S_2 في هذه النقطة، أي يجب أن يكون هذا المماس معامدا بآن واحد لناظمي السطحين في هذه النقطة.

فاذا كان $\vec{N_1}$ ناظم السطح الاول S_1 ، $\vec{N_2}$ ناظم السطح الثاني S_2 عند النقطة M فان منحى المماس عند M يتعين بالشعاع :



شكل (٣٨)

$$\vec{T} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$$

أي :

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{T} = (f'_y \cdot g'_z - g'_y \cdot f'_z)\,\vec{i} + (f'_z \cdot g'_x - g'_z \cdot f'_x)\,\vec{j} + (f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y)\,\vec{k}$$

$$\vec{T} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$$

حيث u, v, w هي مركبات $\vec{T}$ وفق المحاور الثلاثة . وعندئذ تكون معادلتا المستقيم المماس :

$$\frac{X-x}{u} = \frac{Y-y}{v} = \frac{Z-z}{w} \qquad (4.10.1)$$

حيث (X,Y,Z) نقطة متحولة على المماس .

والمستوي الناظم على المنحني عند النقطة $M(x,y,z)$ هو بالتعريف المستوي الذي يعامد المماس للمنحني عند هذه النقطة . وعندئذ تكون معادلته :

$$u(X-x) + v(Y-y) + w(Z-z) = 0 \qquad (4.10.2)$$

حيث (X,Y,Z) نقطة متحولة على المستوي الناظم .

مثال

أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوي الناظم للمنحني :

$$f(x,y,z) \equiv x^3 - 2yz + y + z - 2 = 0$$
$$g(x,y,z) \equiv 2x^2 + 3xy - 2 = 0$$

في النقطة $M(1,0,1)$

الحل :

$$f'_x = 3x^2 \;,\; f'_y = -2z+1 \;,\; f'_z = -2y+1$$
$$g'_x = 4x+3y \;,\; g'_y = 3x \;,\; g'_z = 0$$

وعند النقطة M تكون القيم العددية لهذه المشتقات :

$$f'_x = 3 \ , \ f'_y = -1 \ , \ f'_z = 1$$

$$g'_x = 4 \ , \ g'_y = 3 \quad g'_z = 0$$

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{T} = -3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 13\,\vec{k}$$

معادلتا المستقيم المماس هما :

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{13}$$

ومعادلة المستوي الناظم هي :

$$-3(x-1) + 4y + 13(z-1) = 0$$

$$-3x + 4y + 13z - 10 = 0$$

الحالة الثانية :

اذا كان المنحني معينا بمعادلاته الوسيطية :

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t)$$

فان أمثال توجيه منحى المماس في النقطة $M(x,y,z)$ تكون:

$$dx = x'.dt \ , \ dy = y'.dt \ , \ dz = z'.dt$$

وهذه الامثال تتناسب مع (x',y',z') وبذلك تكون معادلتا

المستقيم المماس :

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} \qquad (4.10.3)$$

حيث (X,Y,Z) نقطة متحولة على المماس ،ومعادلة المستوي الناظم تكون :

$$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0 \qquad (4.10.4)$$

حيث (X,Y,Z) نقطة متحولة في المستوي الناظم .

مثال :

أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوي الناظم للمنحني المعين بالمعادلات الوسيطية :

$$x = 3\cos 2t \ , \ y = 2\sin 2t \ , \ z = 2t + 1$$

عند النقطة M الموافقة للقيمة $t=0$.

الحل :

ان احداثيات نقطة التماس هي : $x=3, \ y=0, \ z=1$

$$x' = -6\sin 2t \ , \ y' = 4\cos 2t \ , \ z' = 2$$

ومن أجل $t=0$ يكون :

$$x' = 0 \ , \ y' = 4 \ , \ z' = 2$$

فمعادلتا المستقيم المماس هما :

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

ومعادلة المستوي الناظم هي :

$$0(x-3)+4y+2(z-1) = 0$$

ومنه

$$2y+z-1 = 0$$

المعادلة المطلوبة .

* * *

تمارين (٤)

١- أوجد معادلات المستوي المماس والمستقيم الناظم عند النقطة $(2,1,-1)$ من السطح :

$$x^2-2y^2+6z^2+12zx+16=0$$

٢- أثبت أن المستوي :

$$4x-6y-z+14=0$$

يمس السطح :

$$x^2+3y^2+2z=0$$

ثم أوجد احداثيات نقطة التماس .

٣- اوجد معادلتي المستويين المماسين للسطح :

$$2x^2-6y^2+3z^2-5=0$$

اللذين يمران بالمستقيم :

$$x+9y-3z=0$$
$$3x-3y+6z-5=0$$

ثم أوجد نقطتي التماس .

٤- ليكن لدينا السطح (S) المعين بالمعادلة :

$$xy^2-xz^2-y+z-2=0$$

أوجد معادلات المستويات التي تمس هذا السطح وتمر من النقطة

ومن مبدأ الاحداثيات $(-1,6,6)$.

٥- لدينا السطح (S) المعين بالمعادلة :

$$(\alpha^2-1)(x^2+y^2-1)+(z-\alpha-1)^2=0$$

والمستوي P المعين بالمعادلة :

$$x+y-\sqrt{2}\,z+\sqrt{2}=0$$

١- اوجد بدلالة α نقاطا من (S) يكون فيها الناظم معامد المستوى P.

٢- برهن أن المستوي P يمس السطح (S) مهما كانت α .

٦- لدينا السطح (S) معين بالمعادلات الوسيطية :

$$x=\lambda\cos\varphi \quad ; \quad y=\lambda\sin\varphi \quad ; \quad z=\lambda$$

١- اوجد معادلته الديكارتية.

٢- اثبت أن هذا السطح هو مخروط دوراني رأسه في مبدأ الاحداثيات ومحوره oz

٣- اكتب معادلة المستوي المماس لهذا السطح في النقطة الموافقة للوسيطين :

$$\varphi=\frac{\pi}{6} \quad , \quad \lambda=2$$

٧- لدينا السطح (S) المعين بالمعادلة :

$$x^2-4yz+8y+4z-8=0$$

١- اكتب معادلة المستوي المماس لهذا السطح في نقطة ما منه ، وبرهن أن المستويات المماسة لهذا السطح تمر دوما من نقطة ثابتة ، يطلب تعيينها .

٢- اقطع السطح السابق بالمستوي :

$$x-2y-z+2=0$$

اوجد معادلة المسقط القائم لمنحني التقاطع (C) على المستوي yoz وارسم هذا المسقط .

٨- لدينا المنحني (C) معين بالمعادلات الوسيطية :

$$x=\frac{t}{t+1} \; , \; y=-t-1 \; , \; z=\frac{t-1}{t+1}$$

١- اوجد المعادلتين الديكارتيتين لهذا المنحني .

٢- اوجد معادلات المساقط القائمة لهذا المنحني على المستويات الاحداثية وارسم هذه المساقط .

٩- لدينا المنحني (C) المعين بالمعادلات الوسيطية :

$$x=e^t \; , \; y=t.e^{t-1} \; , \; z=e^{t+1}$$

١- أوجد معادلتي المستقيم المماس له في النقطة الموافقة لقيمة الوسيط $t=1$.

٢- اوجد معادلة المستوي الناظم له عند نقطة تقاطعه مع المستوي xoz .

١٠- ليكن المنحني (C) معينا بالمعادلات الوسيطية :

$$x=t-1 \; , \; y=t^2 \; , \; z=t(t-2)$$

١- اوجد المعادلتين الديكارتيتين لهذا المنحني ، وأوجد معادلة مسقطه القائم على كل من المستويين xoy ، xoz وارسم المسقطين .

٢- عيّن نقاط تقاطع هذا المنحني مع المستويات الاحداثية الثلاثة ، ثم أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوي الناظم لهذا المنحني في نقطة تقاطعه مع المستوي yoz •

٣- ادرس تقاطع هذا المنحني مع مجموعة المستويات الموازية للمستوي :

$$x + y + z - 1 = 0$$

الفصل الخامس

سطوح الدرجة الثانية

(5.1) ـ المعادلة العامة لسطوح الدرجة الثانية :

نقول عن السطح (S) انه من الدرجة الثانية اذا كانت معادلته من الدرجة الثانية في المتحولات x, y, z والشكل العام لمعادلة هذا السطح هو :

$$f(x,y,z) \equiv a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2b_1 yz + 2b_2 xz + 2b_3 xy + 2c_1 x + 2c_2 y + 2c_3 z + d = 0 \qquad (5.1.1)$$

الحدود الثلاثة الاولى تسمى بالحدود المربعة والحدود الثلاثة التي تليها تسمى بالحدود المستطيلة والحدود الثلاثة التالية تسمى بالحدود الخطية والحد الاخير حد ثابت •

وتكتب المعادلة (5.1.1) بشكل مختزل كالآتي :

$$f(x,y,z) \equiv F(x,y,z) + 2p(x,y,z) + d = 0$$

حيث $F(x,y,z)$ هو تابع متجانس من الدرجة الثانية

ويحوي على الحدود الستة الاولى و $2p(x,y,z)$ هو تابع متجانس من الدرجة الاولى ويحوي على الحدود الثلاثة التي تليها ، و d حد ثابت

(5.2) ـ مراكز التناظر للسطوح من الدرجة الثانية :

يكون مبدأ الاحداثيات مركز تناظر للسطح من الدرجة الثانية الذي معادلته (5.1.1) اذا كان :

$$f(x,y,z) \equiv f(-x,-y,-z)$$

وهذا الشرط يتحقق عندما تنعدم الحدود الخطية في المعادلة (5.1.1) وهذا يتم عندما $c_1=c_2=c_3=0$ أي اذا كانت المعادلة لا تحوي حدوداً خطية.

واذا كانت معادلة السطح حاوية على حدود خطية وكانت النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ مركز تناظر السطح فان انسحاب جملة المحاور الاحداثية وفق الشعاع $\overrightarrow{OM_0}$ يجب أن يعدم الحدود الخطية. لذلك لايجاد مركز تناظر سطح من الدرجة الثانية يلزم ويكفي ان نفتش عن الانسحاب الذي يعدم الحدود الخطية، فاذا كانت $M_0(x_0,y_0,z_0)$ مركزاً للجملة الجديدة يكون :

$$x=x_0+X \quad , \quad y=y_0+Y \quad , \quad z=z_0+Z$$

فاذا عوضنا هذه المتحولات في المعادلة العامة للسطح من الدرجة الثانية (5.1.1) ورتبنا الحدود ترتيبا تنازليا في المتحولات X, Y, Z نجد :

أمثال x في المعادلة الجديدة هي $2a_1x_0+2b_3y_0+2b_2z_0+2c_1 \equiv f'_{x_0}$

أمثال Y في المعادلة الجديدة هي :

$$2b_3x_0+2a_2y_0+2b_1z_0+2c_2 \equiv f'_{y_0}$$

أمثال Z في المعادلة الجديدة هي :

$$2b_2x_0+2b_1y_0+2a_3z_0+2c_3 \equiv f'_{z_0}$$

فاذا كانت M_0 مركز تناظر السطح (S) فان احداثياتها تحقق المعادلات الخطية الثلاث :

$$f'_{x_0}=0 \quad , \quad f'_{y_0}=0 \quad , \quad f'_{z_0}=0 \qquad (5.2.1)$$

ونلاحظ ان هذه المعادلات الثلاثة تمثل ثلاثة مستويات، ونكون أمام احدى الحالات الآتية :

١- يكون لهذه الجملة حل وحيد هو x_0,y_0,z_0 عندما يكون معين الامثال $\Delta\neq0$ أي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

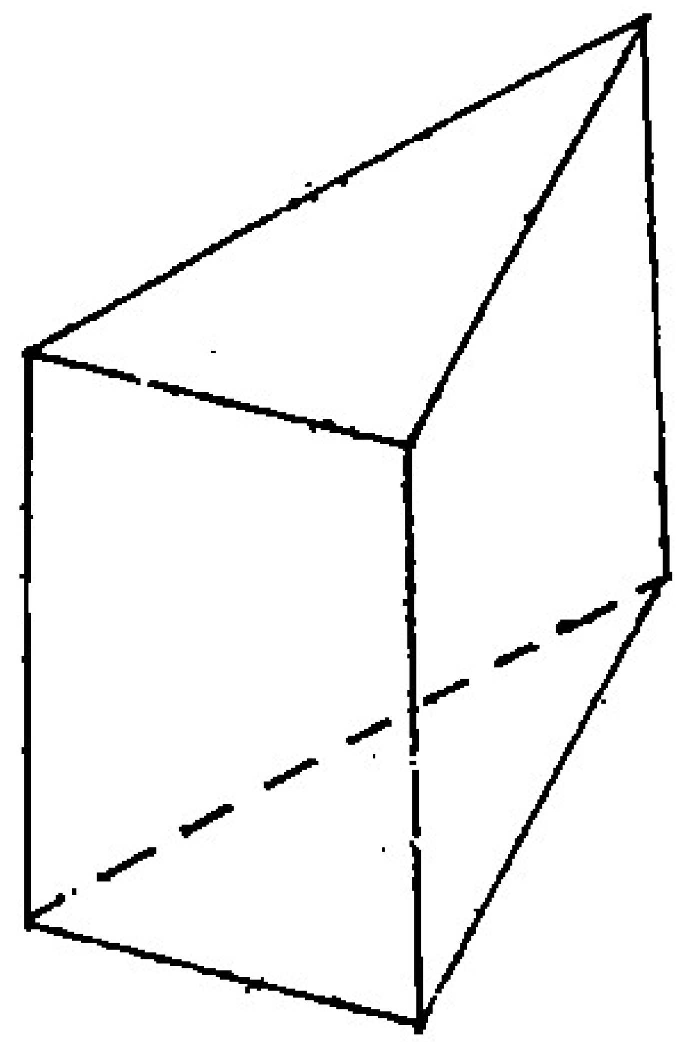
وعندئذ تكون النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ مركز تناظر وحيد للسطح حيث :

$$x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta} \quad , \quad y_0=\frac{\Delta_y}{\Delta} \quad , \quad z_0=\frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (5.2.2)$$

٢- اذا كانت $\Delta = 0$ ، أي نواظم هذه المستويات تقع في مستوى واحد .

وهنا حالتان :

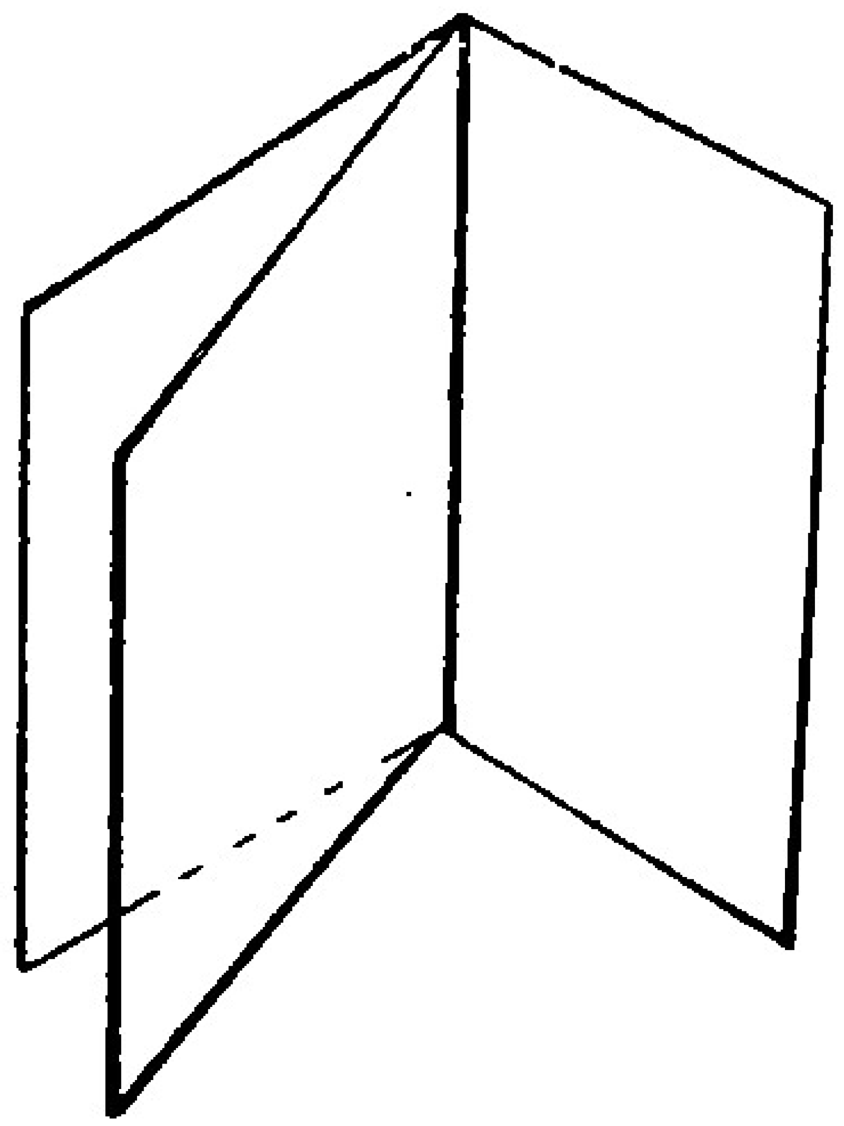
أ- اذا كانت $\Delta_x \neq 0, \ \Delta_y \neq 0, \ \Delta_z \neq 0$ عندئذ لا يوجد للجملة حل وبالتالي تكون المستويات الثلاثة متقاطعة مثنى مثنى وتوازي استقامة معينة وتشكل الوجوه الثلاثة لسطح موشوري شكل (٣٩) ولا يوجد للسطح مركز تناظر .



شكل (٣٩)

ب- اذا كانت $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \ \Delta_z = 0$

في هذه الحالة تكون احدى المعادلات الثلاثة ناتجة عن المعادلتين الباقيتين وبالتالي ترد جملة المعادلات هذه الى جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل ولها عدد لا متناه من الحلول وهذه الحلول هي نقاط الفصل المشترك لهذه المستويات وعندئذ نقول ان للسطح (S)



شكل (٤٠)

محور تناظر هو الفصل المشترك ،شكل(٤٠) .

٣- اذا كانت $\Delta = 0$ بسبب تناسب العناصر المتقابلة في صفين على الاقل فالجملة مستحيلة الحل لانها تمثل جملة مستويات اثنان منها متوازيان على الاقل وعندئذ لا يكون للسطح مركز او محور تناظر .

اما اذا تناسبت أمثال المجاهيل في كل صفين مع الثوابت الواردة في المعادلات الثلاثة فالجملة تمثل ثلاثة مستويات متطابقة وعندئذ تكون جميع نقاط مستويها المشترك نقاط تناظر للسطح وبالتالي يكون هذا المستوي مستوي تناظر للسطح .

مثـــال(1): -

عيّن مركز تنـاظر السطح الذي معادلته :

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$$

الحـــل :

ان مركز تنـاظر السطح يعين بـالحل المشترك لمجموعة المعـادلات الآتيـــة :

$$f'_x \equiv 6x + 2z + 2y - 4 = 0$$
$$f'_y \equiv 10y + 2z + 2x = 0$$
$$f'_z \equiv 6z + 2y + 2x - 8 = 0$$

وتختزل الى الشكل :

$$3x + y + z - 2 = 0$$
$$x + 5y + z = 0$$
$$x + y + 3z - 4 = 0$$

بحل هذه الجملة نجد ان مركز التنـاظر هو النقطة :

$$\left(\frac{1}{3} \;,\; -\frac{1}{3} \;,\; \frac{4}{3}\right)$$

مثـــال(٢):

عيّن مراكز تنـاظر السطح الذي معادلته :

$$x^2 + 3y^2 - z^2 - 4xy - 2yz + 2x + 4z - 1 = 0$$

الحـــل :

$$f'_x \equiv 2x - 4y + 2 = 0$$
$$f'_y \equiv 6y - 4x - 2z = 0$$
$$f'_z \equiv -2z - 2y + 4 = 0$$

وتختزل الى الشكل :

$$x - 2y + 1 = 0 \qquad (1)$$
$$-2x + 3y - z = 0 \qquad (2)$$
$$y + z - 2 = 0 \qquad (3)$$

معين الامثال :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

فالجملة لها عدد لا متناه من الحلول اي للسطح مراكز تنـاظر تقع على المستقيم :

$$y + z - 2 = 0 \quad , \quad x - 2y + 1 = 0$$

ملاحظـــة:

اذا رجعنا الى المعـادلات الثلاث نجد بسهولة أنه اذا جمعنـا المعادلتين (2) ،(3) نحصل على المعادلة (1) مما يدل علـى أن المستويات الثلاثة تشترك بفصل مشترك جميع نقاط مراكز تنـاظـر

وبالتالي السطح يقبل هذا الفصل المشترك محورا للتناظر .

مثال (٣) :

عيّن مراكز التناظر للسطح الذي معادلته :

$$x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz-x+y-2z=0$$

الحل :

$$f'_x \equiv 2x-2y+4z-1=0 \qquad (1)$$

$$f'_y \equiv 2y-2x-4z+1=0 \qquad (2)$$

$$f'_z \equiv 8z+4x-4y-2=0 \qquad (3)$$

نلاحظ بسهولة ان جملة المعادلات الثلاث تمثل ثلاث مستويات متطابقة ، احدها يصلح مستويا لتناظر السطح .

مثال (٤) :

عيّن مراكز تناظر السطح الذي معادلته :

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2x+3y+z=0$$

الحل :

$$f'_x \equiv 2x+2y+2=0 \qquad (1)$$

$$f'_y \equiv 2y+2x+3=0 \qquad (2)$$

$$f'_z = 2z+1=0 \qquad (3)$$

نرى بسهولة ان المعادلتين (1) ، (2) تمثلان مستويين

متوازيين فلا يوجد للجملة حل ، وبالتالي لا يوجد للسطح مراكز تناظر.

المخروط الموجه والمخروط المقارب لسطح من الدرجة الثانية :

ليكن (S) سطحا من الدرجة الثانية معادلته :

$$f(x,y,z)\equiv F(x,y,z)+2p(x,y,z)+d=0 \qquad (5.2.1)$$

ولنفرض وجود نقاط من هذا السطح بعيدة جدا من مركز الاحداثيات ، فعندما x,y,z تتناهى نحو اللانهاية فان :

$$\lim f(x,y,z)=F(x,y,z)=0$$

لانه يمكن اهمال الحدود الخطية والحد الثابت امام الحدود من الدرجة الثانية ، وعندئذ المعادلة :

$$F(x,y,z)=0 \qquad (5.1.3)$$

تمثل سطحا متجانسا من الدرجة الثانية (S') هو مخروط رأسه مبدأ الاحداثيات هذا المخروط بالتعريف يسمى بالمخروط الموجه للسطح (S) .

ويصبح المخروط الموجه مخروطا مقاربا للسطح (S) اذا كانت مركز تناظره هو مركز تناظر السطح نفسه .

مثال(١) :

ليكن السطح (S) الذي معادلته :

$$x^2-2y^2+z^2+2xy-10=0$$

معادلة المخروط الموجه لهذا السطح هي :

$$x^2-2y^2+z^2+2xy=0$$

ونلاحظ ان هذا المخروط هو بنفس الوقت مخروط مقارب للسطح لان المشتقات الجزئية للسطحين هي نفسها وبالتالي مركز تناظر السطح هو مركز تناظر هذا المخروط فهو مخروط مقارب . وبصورة عامة للحصول على معادلة المخروط المقارب لسطح من الدرجة الثانية نجري انسحابا لرأس المخروط الموجه الى مركز تناظر السطح ،فاذا كانت معادلة المخروط الموجه هي :

$$F(x,y,z)=0$$

يكفي ان نبدل في هذه المعادلة كل x ب $x-x_0$ وكل y ب $y-y_0$ وكل z ب $z-z_0$ حيث (x_0,y_0,z_0) مركز تناظر السطح المعطي .

مثال :

ليكن السطح (S) معينا بالمعادلة :

$$2x^2-y^2+z^2+xy+9y-7=0$$

ولنوجد معادلة المخروط المقارب لهذا السطح .

الحل :

١- لنوجد أولا مركز تناظر السطح

$$f'_x=4x+y \quad , \quad f'_y=-2y+x+9 \quad , \quad f'_z=2z$$

بحل جملة المعادلات :

$$2z=0 \quad , \quad x-2y+9=0 \quad , \quad 4x+y=0$$

نجد : $z=0,\ y=4\ ,\ z=-1$ احداثيات مركز تناظر السطح

٢- ان معادلة المخروط الموجه لهذا السطح هي :

$$2x^2-y^2+z^2+xy=0$$

٣- نستبدل في المعادلة الاخيرة كل x ب $x+1$ وكل y ب $y-4$ و z نفسها يكون :

$$2(x+1)^2-(y-4)^2+z^2+(x+1)(y-4)=0$$

ومنه نجد :

$$2x^2-y^2+z^2+xy+9y-18=0$$

هي معادلة المخروط المقارب للسطح .

(5.3) ـ الاشكال المختلفة للسطوح من الدرجة الثانية :

وجدنا في الفقرة (5.1) ان الشكل العام لمعادلة سطح من الدرجة الثانية هو :

$$f(x,y,z)\equiv F(x,y,z)-2p(x,y,z)+d=0$$

فاذا اجرينا انسحابات مناسبة ودورانات مناسبة ايضا لجملة المحاور الاحداثية $oxyz$ نستطيع حذف الحدود الخطية والمستطيلة من هذه المعادلة وبذلك نكون قد رددنا المعادلة العامة للسطح الى الشكل المختزل :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0 \qquad (5.3.1)$$

ونلاحظ أن المعادلة الاخيرة تحوي على حدود مربعة وحد مطلق فقط،وهذا الشكل المختزل يسهل علينا دراسة السطح وتعيين نوعه.

وسوف ندرس في هذا الفصل جميع الاشكال الممكنة للسطوح من الدرجة الثانية من خلال مناقشة أمثال الحدود في المعادلة (5.3.1) وسنقوم بدراسة مقاطع هذه السطوح بمستويات توازي المستويات الاحداثية لنتعرف على شكل هذا السطح.

(5.4) ـ مجسم القطع الناقص :

وجدنا في الفقرة السابقة أن المعادلة المختزلة للسطح من الدرجة الثانية هي :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0 \qquad (5.4.1)$$

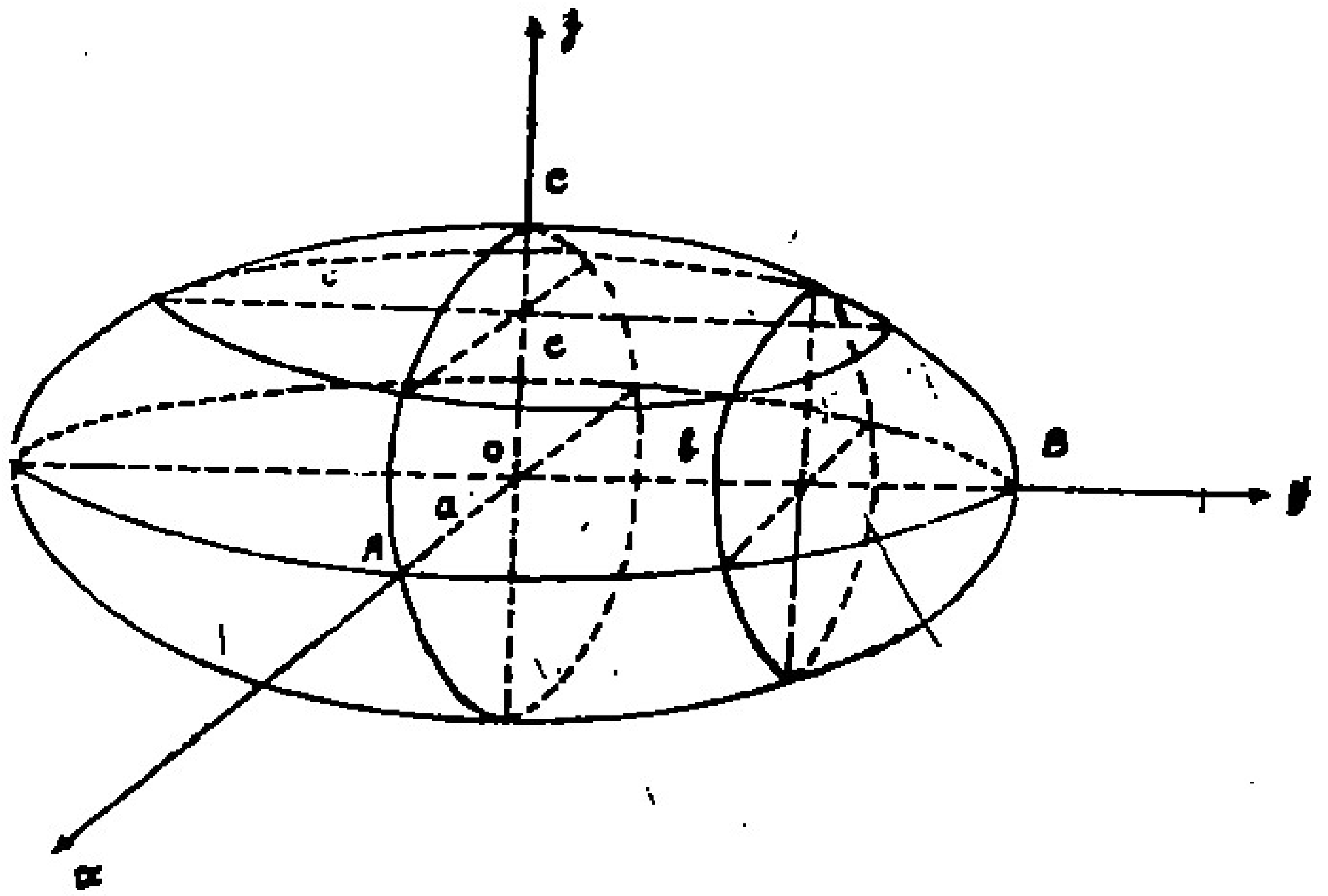
فاذا كانت الاعداد الحقيقية A,B,C,D مغايرة للصفر وكانت الامثال A,B,C من اشارة واحدة مغايرة لاشارة الحد المطلق D فالمعادلة (5.4.1) تكتب بالشكل :

$$\frac{x^2}{\frac{-D}{A}} + \frac{y^2}{\frac{-D}{B}} + \frac{z^2}{\frac{-D}{C}} = 1$$

فالمخارج كميات موجبة بالفرض لذلك نستطيع كتابة المعادلة السابقة بالشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5.4.2)$$

هذه المعادلة تدعى بالمعادلة النموذجية لمجسم القطع الناقص ،شكل (٤١).



شكل (٤١)

ولنتعرف على هذا السطح نقطعه بمستويات توازي المستويات الاحداثية . فاذا قطعناه بمستويات توازي المستوي xoy معادلتها z=h حيث h وسيط متحول تكون معادلتا منحني التقاطع جملة المعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ &z = h \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.3)$$

أو جملة المعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ &z = h \end{aligned}\right\}$$

دراسة التقاطع :

١- اذا كان : $|h| < C$

عندئذ يكون المقطع حقيقيا وهو قطع ناقص نصفا محوريه هما :

$$b' = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad , \quad a' = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \qquad (5.4.4)$$

وهذا القطع يقع في مستو افقي راقمه $z=h$ ومركزه (o,o,h) ومتناظر بالنسبة للمستويين oyz, oxz .

وبحالة خاصة عندما $h=0$ فان المستوي القاطع للمجسم هو المستوي xoy والمقطع هو قطع ناقص، نصفا محوريه $b'=b,\ a'=a$ ويكون محورا القطع أعظميين والقطع الناقص يكون أكبر ما يمكن .

٢- من $(5.4.4)$ نلاحظ أنه كلما ازدادت قيمة h فان نصفي المحورين a', b'، يتناقصان بالطول، ومن اجل $h = \pm c$ فان $a'=b'=0$ اي المستويان القاطعان $z = \pm c$ يمسان المجسم عند النقطتين (o,o,c) $(o,o,-c)$ حيث يتحول المقطع عند هاتين النقطتين الى نقطتي تماس .

٣- اذا كان $|h| > C$ فان جملة المعادلتين $(5.4.3)$ تمثلان قطعا ناقصا وهميا، أي ان المستوي $z=h$ في هذه الحالة لا يقطع المجسم . وبطريقة مماثلة نحصل على مقاطع المجسم بمستويات توازي المستويين $yoz,\ xoz$ وهي قطوع ناقصة أيضا .

ونلاحظ ايضا ان مقطع المجسم بالمستوي xoz هو القطع الناقص :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (5.4.5)$$

نصفا محوريه c, a .

كذلك نلاحظ ان مقطع المجسم بالمستوي yoz هو القطع الناقص :

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (5.4.6)$$

نصفا محوريه c, b .

نستنتج من دراسة التقاطع : أن مجسم القطع الناقص هو سطح بيضوي مغلق له ثلاثة مستويات تناظر متعامدة مثنى مثنى هي المستويات الاحداثية لجملة المحاور المختارة، وقد اكتفينا في الشكل (٤١) برسم المقاطع بالمستويات الاحداثية فقط، والاطوال $oB=b,\ oA=a$ $oC = c$ تدعى أنصاف محاور المجسم وهذه الاطوال غير متساوية في الحالة العامة. واذا تساوى اثنان منها $a=b$ مثلا فان المقطع بالمستوي $z=0$ يكون دائرة والمقاطع الموازية تكون دوائر أيضا مراكزها على المحور oz، وعندئذ يدعى المجسم بمجسم قطع ناقص دوراني ناتج من دوران قطع ناقص حول المحور oz .

وبحالة خاصة اذا تساوت انصاف المحاور هذه أي $a=b=c$ فان المجسم يتحول الى كرة نصف قطرها a ومركزها o والمقاطع تكون دوائر في هذه الحالة.

ملاحظة :

في المعادلة (5.4.1) اذا فرضنا ان A,B,C,D مغايرة للصفر ومن اشارة واحدة، نحصل على المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

وهي معادلة مجسم قطع ناقص وهمي .

مثال(١) :

عيّن السطح المعرف بالمعادلة :

$$16x^2+3y^2+16z^2-48=0$$

الحل :

هذه المعادلة ترد الى الشكل :

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{3}=1$$

نلاحظ ان هذه المعادلة هي من الشكل النموذجي لمعادلة مجسم قطع ناقص دوراني انصاف محاوره $a=c=\sqrt{3}$, $b=4$ ومحور دورانه هو المحور oy .

مثال(٢) :

عيّن السطح المعرف بالمعادلة :

$$x^2-6x+4y^2+9z^2+36z-99=0$$

الحل :

ترد هذه المعادلة الى الشكل :

$$(x-3)^2+4y^2+9(z+2)^2=144$$

اذا سحبنا نقطة الاصل الى النقطة (3,0,-2) عندئذ هذه المعادلة تصبح :

$$\frac{X^2}{144}+\frac{Y^2}{36}+\frac{Z^2}{16}=1$$

وواضح أنها معادلة مجسم قطع ناقص بحالته العامة، انصاف محاوره :

$$a=12\ ,\ b=6\ ,\ c=4$$

مركزه النقطة (3,0,-2) ومحاوره التناظرية توازي المحاور الاحداثية .

(5.5) مجسم القطع الزائد :

وجدنا سابقا ان المعادلة العامة لسطح من الدرجة الثانية ترد الى الشكل المختزل :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0 \qquad (5.5.1)$$

حيث الاعداد A,B,C,D تخالف الصفر، ولنفرض أن A,B لهما نفس الاشارة وان C من اشارة مخالفة، والمعادلة (5.5.1) تكتب بالشكل :

$$Ax^2+By^2+Cz^2=-D \qquad (5.5.2)$$

ولنميز الان حالتين :

الحالة الاولى :

الحد (D-) من اشارة A,B فاذا قسمنا طرفي المعادلة على D- تصبح من الشكل :

$$\frac{x^2}{\frac{-D}{A}} + \frac{y^2}{\frac{-D}{B}} + \frac{z^2}{\frac{-D}{C}} = 1$$

ولنفرض :

$$c^2 = \frac{+D}{C} \quad , \quad b^2 = -\frac{-D}{B} \quad , \quad a^2 = \frac{-D}{A}$$

والمعادلة تصبح من الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5.5.3)$$

الحالة الثانية :

الحد (-D) من اشارة مغايرة لاشارتي A,B, فاذا قسمنا طرفي المعادلة(5.5.2) على D تصبح من الشكل :

$$\frac{x^2}{\frac{D}{A}} + \frac{y^2}{\frac{D}{B}} + \frac{z^2}{\frac{D}{C}} = -1$$

لنفرض :

$$c^2 = -\frac{D}{C} \quad , \quad b^2 = \frac{D}{B} \quad , \quad a^2 = \frac{D}{A}$$

والمعادلة تصبح من الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (5.5.4)$$

نسمي السطح ذا المعادلة(5.5.3) بمجسم القطع الزائد ذي الفرع الواحد ،ونسمي السطح ذا المعادلة(5.5.4) بمجسم القطع الزائد ذي الفرعين ،وسنوضح فيما يلي أسباب هذه التسمية بعد دراسة كل سطح على حدة من خلال المقاطع المختلفة لكل منها .

ا- مجسم القطع الزائد ذو الفراغ الواحد :

ان معادلة هذا السطح بالشكل النموذجي هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5.5.3)$$

لندرس اذن مقاطع هذا السطح بالمستويات الاحداثية :

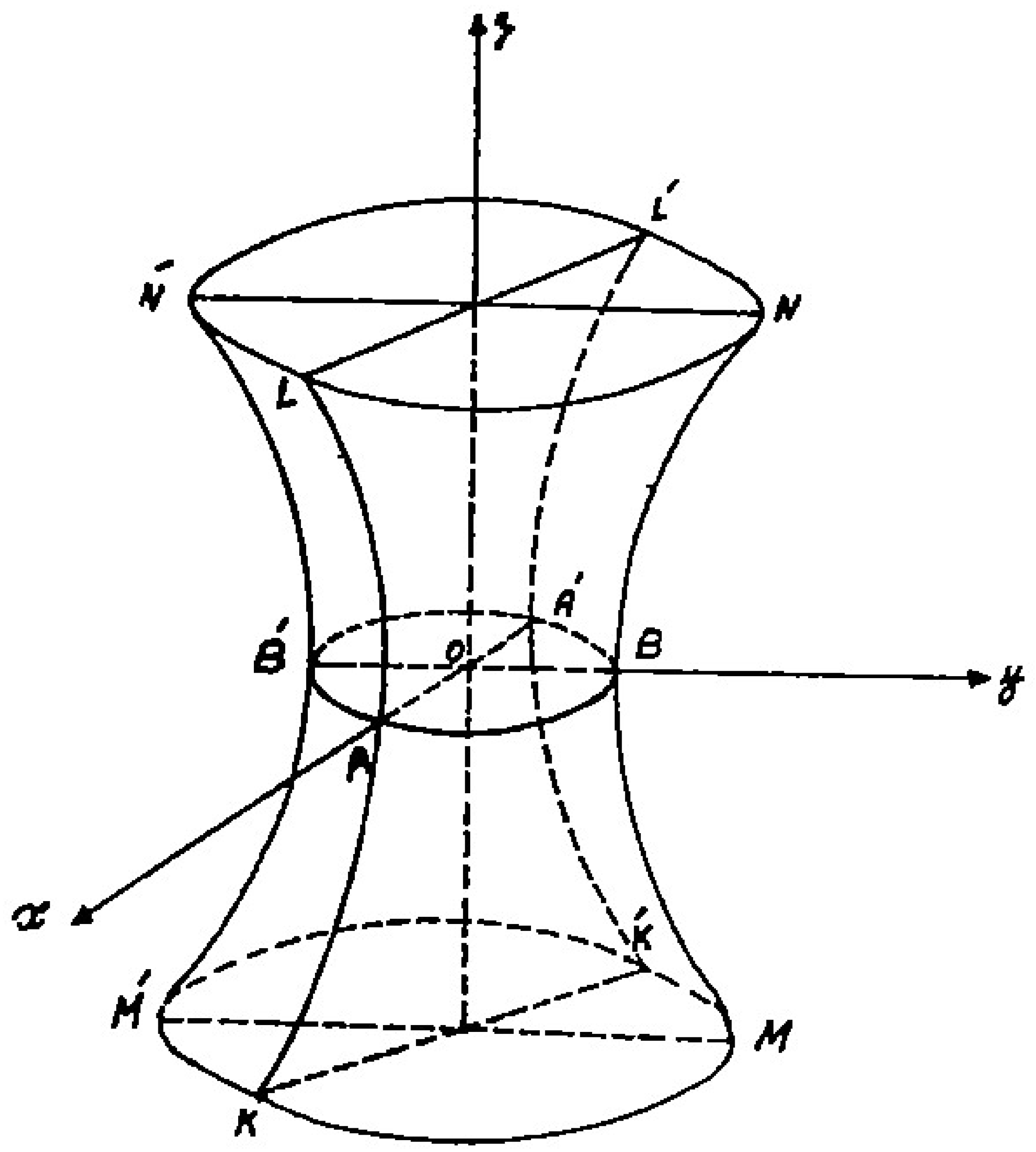
آ- ان مقطع السطح بالمستوي xoz معرف بالمعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

وواضح ان المقطع هو قطع زائد وواقع في المستوي xoz محوره القاطع2a محمول على محور السينات ومحوره غير القاطع 2c محمول على المحور oz . ويتألف من الفرعين LK وL'K' في الشكل(٤٢) ويقطع محور السينات عند النقطتين (A (a,o,o ، A'(-a,o,o) .

ب- ان مقطع السطح بالمستوي yoz معرف بالمعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.5)$$



شكل (٤٢)

وواضح ان المقطع هو قطع زائد .أيضا واقع في المستوي yoz محوره القاطع 2b محمول على محور العينات ومحوره غير القاطع 2c محمول على المحور oz ويتألف من الفرعين N'M', NM في الشكل (٤٢) ويقطع محور العينات عند النقطتين B'(o,-b,o), B(o,b,o)

جـ - ان مقطع السطح بالمستوي xoy معرف بالمعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.6)$$

وواضح ان المقطع هو قطع ناقص وواقع في المستوي xoy، محوره الكبير 2a محمول على محور السينات ومحوره الصغير 2b محمول على محور العينات حيث فرضنا a>b اما مقاطع السطح بالمستويات الموازية للمستوي xoy فمعرفة بالمعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z &= h \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.7)$$

وواضح أن هذه المقاطع عبارة عن قطوع ناقصة أنصاف محاورها :

$$a' = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \quad , \quad b' = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \qquad (5.5.8)$$

وواضح من (5.5.8) أن أنصاف هذه المحاور تأخذ قيما أصغرية من اجل h=0 وبالتالي يكون a'=a ,b'= b، وبعبارة أخرى يكون المقطع اصغريا عندما تقطع المجسم بالمستوي z = 0 •

كما نلاحظ من(5.5.8.) ان أنصاف محاورهذه القطوع تزداد بازدياد h
نستنتج من الدراسة السابقة للمقاطع : ان مجسم القطع الزائد ذا الفرع الواحد له شكل انبوب مقاطعه الافقية قطوع ناقصه أصغرها القطع الناقص الواقع في المستوي xoy كما نلاحظ ان لهذا السطح ثلاثة مستويات تناظر متعامدة مثنى مثنى ،وفي جملة الاحداثيات المختارة هذه المستويات هي المستويات الاحداثية •
نسمي المقادير a,b,c انصاف محاور هذا المجسم ،وبحالة خاصة عندما a=b فان المعادلة (5.5.7) تمثل مجموعة دوائر مركزها على المحور oz وعندئذ يكون المجسم مجسم قطع زائد دوراني ذا فرع واحد ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره غير القاطع له •

٢ـ مجسم القطع الزائد ذو الفرعين :

ان معادلة هذا السطح بالشكل النموذجي هي :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

لندرس ايضا مقاطع هذا السطح بالمستويات الاحداثية :

آ ـ ان مقطع هذا السطح بالمستوي xoz معرف بالمعادلتين :

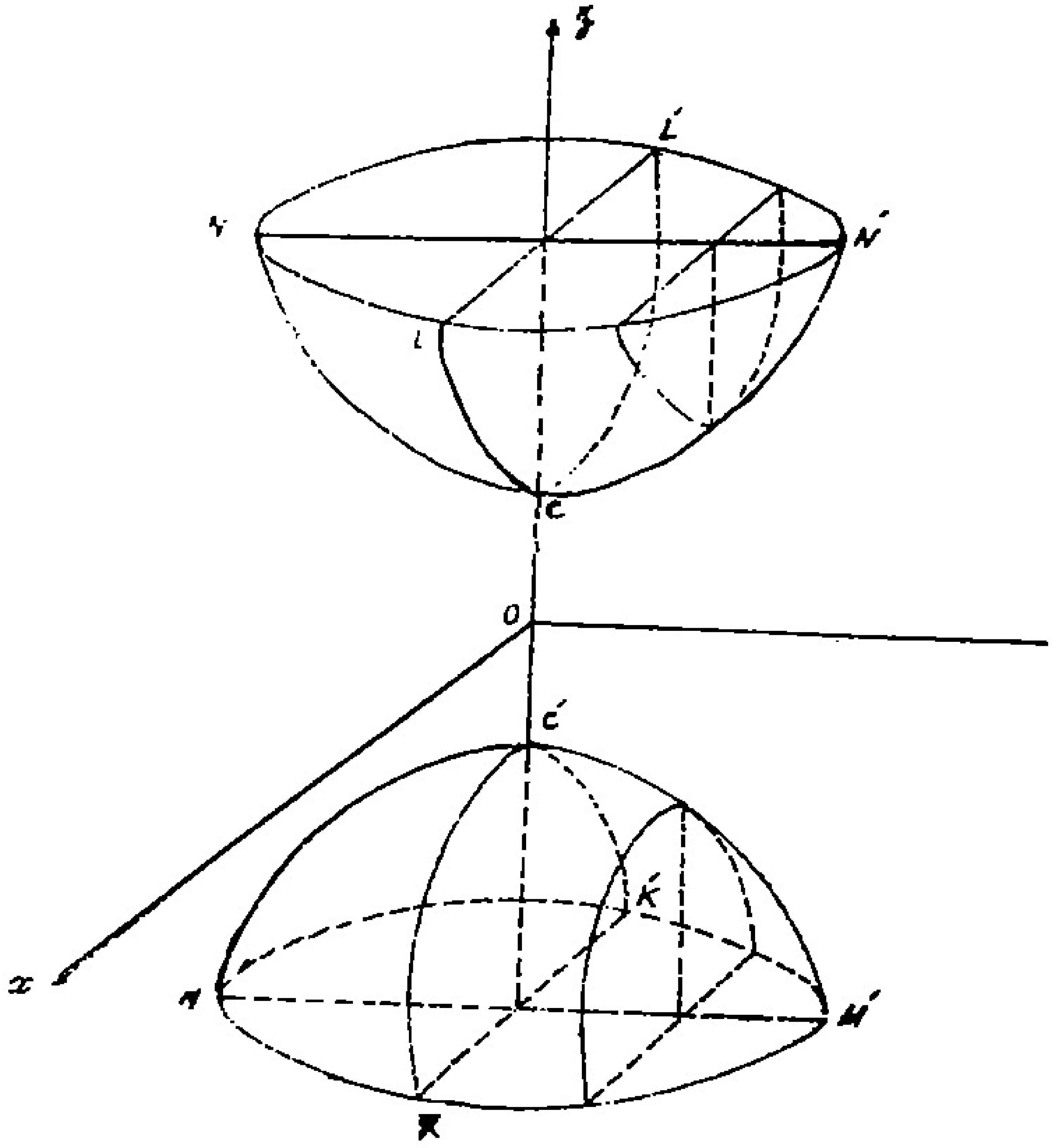
$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ y=0\end{array}\right\} \qquad (5.5.9)$$

وواضح أن هذا المقطع هو قطع زائد واقع في المستوي xoz محوره القاطع 2c محمول على المحور oz ومحوره غير القاطع 2a محمول على محور السينات ويقطع المحور oz في النقطتين C(o,o,c) و C'(o,o,-c) ويتألف من الفرعين (KC'K',LCL') شكل(٤٣).

ب ـ ان مقطع هذا السطح بالمستوي yoz معرف بالمعادلتين :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ x=0\end{array}\right\} \qquad (5.5.10)$$

وواضح ان هذا المقطع هو قطع زائد واقع في المستوي yoz محوره القاطع 2c محمول على المحور oz ومحوره غير القاطع 2b محمول على المحور oy ويقطع المحور oz في النقطتين C(o,o,c) و C'(o,o-c) ويتألف من الفرعين MC'M',NCN' .



شكل (٤٣)

جـ ـ لندرس الان مقاطع هذا السطح بمستويات توازي المستوي xoy ان هذه المقاطع معرفة بالمعادلتين :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1\\ z=h\end{array}\right\} \qquad (5.5.11)$$

1- اذا كان $|h| > c$ فالمستوي $z=h$ يقطع المجسم وفق قطع ناقص نصفا محوريه :

$$a' = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} \quad , \quad b' = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$

وهذا القطع متناظر بالنسبة للمستويين xoz، yoz .

2- عندما تزداد القيمة $|h|$ تزداد أطوال أنصاف المحاور $a';b'$ وبالتالي تكبر هذه المقاطع وهي قطوع ناقصة.

3- عندما $|h| = c$ فان $a'=b'=0$ ويصبح المقطع نقطة عند النقطتين $C(o,o,c),C'(o,o,-c)$ والمستويان $z=\pm c$ يمسان المجسم عند النقطتين C',C .

4- ومن اجل $|h|<c$ فالمستوي $z=h$ لا يقطع المجسم في أي نقطة ونقول ان المقطع يصبح قطعا ناقصا وهميا .

ونستنتج من الدراسة السابقة ان مجسم القطع الزائد ذا الفرعين هو سطح مؤلف من فرعين منفصلين، ومن هنا أتت تسميته بذي الفرعين، كما ان هذا المجسم يقبل ثلاثة مستويات تناظر متعامدة مثنى مثنى، وهذه المستويات هي المستويات الاحداثية للجملة الاحداثية المختارة. ونسمي الاطوال a,b,c أنصاف محاور هذا المجسم .

ومن اجل $a=b$ تصبح المقاطع الافقية دوائرا متوازية، وعندئذ يسمى هذا المجسم بمجسم القطع الزائد ذي الفرعين الدوراني ومعادلته النموذجية هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (5.5.12)$$

مثال(1):

عيّن نوع السطح :

$$3x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 30 = 0$$

الحل :

هذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{15} - \frac{x^2}{10} = -1$$

وواضح أنها المعادلة النموذجية لمجسم قطع زائد ذي فرعين وتكتب بشكل آخر :

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{15} = 1$$

مركز تناظره o، وطول نصف المحور القاطع $a=\sqrt{10}$ محمول على السينات وطولا نصفي المحورين غير القاطعين $b=\sqrt{6}$ ، $c=\sqrt{15}$ محمولان على المحورين oy,oz على الترتيب :

مثال (2):

عيّن نوع السطح الذي معادلته :

$$2z^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12x-21= 0$$

الحل :

بالاتمام الى مربع كامل نجد :

$$2(x^2-4x+4)-3(y^2-2y+1)-2(z^2+6z+9)=8$$

ومنه :

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{\frac{8}{3}}-\frac{(z+3)^2}{4}=1$$

نلاحظ بسهولة انه مجسم قطع زائد ذو فرعين مركز تناظـــــره النقطة $(2,1,-3)$ ونصف محوره القاطع $a=2$ محمول على محور يوازي المحور ox .

(5.6) – المخروط من الدرجة الثانية (او المخروط التربيعي):

وجدنا أن المعادلة المختزلة لسطح من الدرجة الثانية هي:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0 \qquad (5.6.1)$$

فاذا كانت الامثال A,B,C مغايرة للصفر والحد المطلـــق $D=0$ عندئذ المعادلة (5.6.1) تصبح :

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0 \qquad (5.6.2)$$

ولنميز حالتين :

الحالة الاولى :

اذا اتفقت اشارات الامثال A,B,C عندئذ المعادلة (5.6.2) تكتب بالشكل :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (5.6.3)$$

ونلاحظ ان هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية فهـــي

فهي تمثل نقطة حقيقية هي نقطة الاصل اونقول من هذه المعادلة أنهـــا معادلة مخروط وهمي .

الحالة الثانية :

اذا اختلفت اشارات الامثال في المعادلة (5.6.2) عندئــــذ المعادلة تكتب بالشكل :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (5.6.4)$$

وهي معادلة مخروط حقيقي رأسه النقطه 0 . ويمكن التعـــرف على هذا السطح بأخذ مقاطع مختلفة له .

أ – اذا قطعنا السطح (5.6.4) بالمستوي $z=c$ فمعادلتا المقطـع :

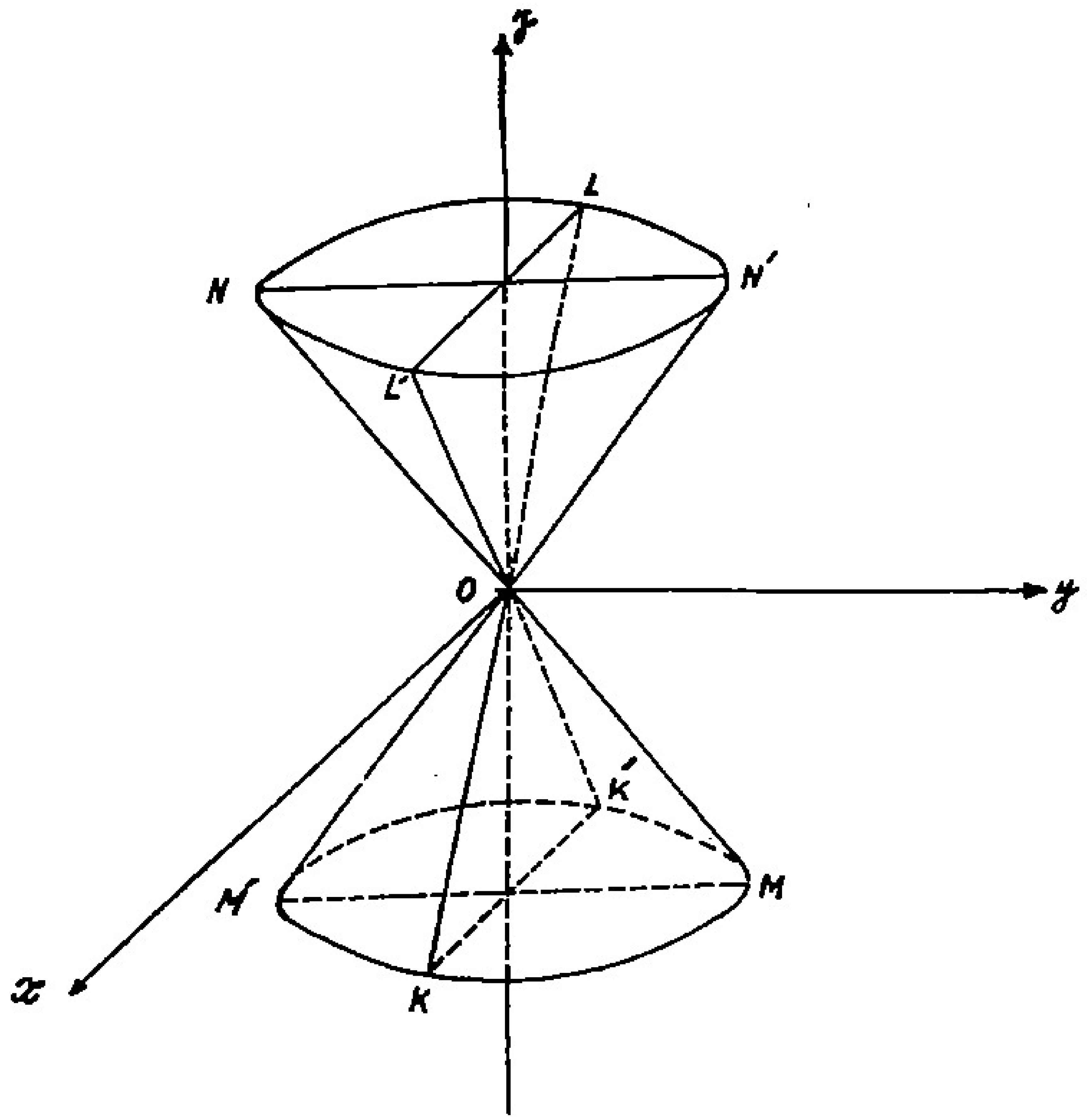
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases} \qquad (5.6.5)$$

ونلاحظ أن المقطع عبارة من قطع ناقص واقع في المستـــوي الافقي $z=c$ شكل (٤٤) .

نصفا محوريه $b,a,$ وهو متناظر بالنسبة للمستويين xoz yoz .

ب – اذا قطع السطح بالمستوي xoz فمعادلتا المقطع :

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\\ y=0\end{cases} \qquad (5.6.6)$$



شكل (٤٤)

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0 \qquad y=0$$

فالمقطع يتألف من جملة المستقيمين :

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0 \quad , \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$$

الواقعين في المستوي xoz وهما KL, K'L' في الشكل(٤٤)٠

جـ ـ اذا قطع السطح بالمستوي yoz فمعادلتا القطع :

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=0\\ x&=0\end{aligned}\right\} \qquad (5.6.7)$$

ويتألف من جملة المستقيمين :

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \quad , \quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$$

الواقعين في المستوي yoz وهما N M , N'M' في الشكل (٤٤)٠ وبحالة خاصة عندما a=b فان المقاطع الافقية المعينة بالمعادلتين (5.6.5) تصبح دوائر افقية ويدعى المخروط بالمخروط الدوراني محور دورانه oz ٠

ملاحظة :

ان مقاطع المخروط بمستويات لا تمر من رأسه ، اما دوائر أو قطوع ناقصة او قطوع زائدة او قطوع مكافئة لذلك قد سميت هذه القطوع بالقطوع المخروطية٠

مثال(١):

المعادلة :
$$x^2+y^2=z^2$$

تمثل مخروطا دورانيا ،مقطعه بالمستوي xoz يتألف من مجموعة المستقيمين $x=\pm z$ ومقاطعة بالمستويات z=h مجموعة من الدوائر الافقية مراكزها على المحور oz ٠

مثال(٢):

المعادلة

$$-x^2+9y^2+3x^2 = 0$$

تمثل مخروطا من الدرجة الثانية (غير دوراني) ٠ان مقطع هذا المخروط بمستو معادلته $z=h$ حيث $h \neq 0$ هو قطع زائد معادلته $x^2-9y^2= 3h^2$ اما من اجل $h=o$ عندئذ يتألف المقطع من جملة المستقيمين $x = \pm 3y$ وهما مولدان للسطح،وكذلك المقطع بالمستوي $y = L$ هو قطع زائد .أيضا معادلته : $x^2-3z^2=9l^2$ اما المقطع بالمستوي $x=d$ حيث $d \neq 0$ فهو قطع ناقص معادلته :

$$9y^2 + 3z^2 = d^2$$

(5.7) – مجسم القطع المكافىء:

اذا اتفق ان كان $a_3=0$ في المعادلة العامة للسطوح من الدرجة الثانية (5.1.1.) أي حوت المعادلة حدين مربعين فقط عندئذ يمكن رد المعادلة العامة الى الشكل :

$$Ax^2 + By^2 + 2Cz = 0 \qquad (5.7.1)$$

ولنفرض ان الامثال A,B,C مغايرة للصفر ،هذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$\frac{x^2}{\frac{-C}{A}} + \frac{y^2}{\frac{-C}{B}} = 2z$$

وحسب اشارات الامثال الوارده في المعادلة يمكن أن نحصل

على المعادلتين :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = \pm 2z \qquad (5.7.2)$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (5.7.3)$$

حيث q,p عددان موجبان ٠

المعادلة الاولى (5.7.2) تمثل معادلة مجسم قطع مكافىء ناقصي محوره oz والاشارة (+) توافق التقعر نحو الاعلى والاشارة (–) توافق التقعر نحو الاسفل ٠

اما المعادلة الثانية (5.7.3) فهي معادلة مجسم قطع مكافىء زائدي ٠

ولندرس الان كلا من هذين المجسمين ونتعرف على شكليهما عن طريق المقاطع لهما ٠

– مجسم القطع المكافىء الناقصي :

معادلة هذا المجسم هي :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = \pm 2z$$

حسب (5.7.2) وسوف نقتصر على دراسة السطح في حالة الاشارة (+) لانه يمكن بسهولة ان نقوم بدراسة مماثلة في حالة الاشارة (–)٠

آ– ان مقطع هذا المجسم بالمستوي xoz معرف بالمعادلتين :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{p}=2z\\ y=0\end{array}\right\}\qquad (5.7.4)$$

واضح ان هذا المقطع هو قطع مكافئ معادلتـه $x^2=2pz$ واقع في المستوي xoz محور تناظره هو المحور oz وذروته مبـدأ الاحداثيات ووسيطه p .

ب ـ ان مقطع هذا المجسم بالمستوي yoz معرف بالمعادلتين :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{q}=2z\\ x=0\end{array}\right\}\qquad (5.7.5)$$

واضح ان هذا المقطع هو قطع مكافئ معادلتـه $y^2=2qz$ واقع في المستوي yoz محور تناظره هو المحور oz ايضا وذروتـه مبدأ الاحداثيات ووسيطه q .

جـ ـ ان مقطع هذا المجسم بمستويوازي المستوي xoy معـرف بالمعادلتين :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h\\ z=h\end{array}\right\}\qquad (5.7.6)$$

فاذا كان $h>0$ فان المستوي $z=h$ يقطع المجسم وفق قطـع ناقص نصفا محورية :

$$a'=\sqrt{2ph}\ ,\ b'=\sqrt{2qh}\qquad (5.7.7)$$

وهذا القطع متناظر بالنسبة للمستويين xoz , yoz شكـل (٤٥) .

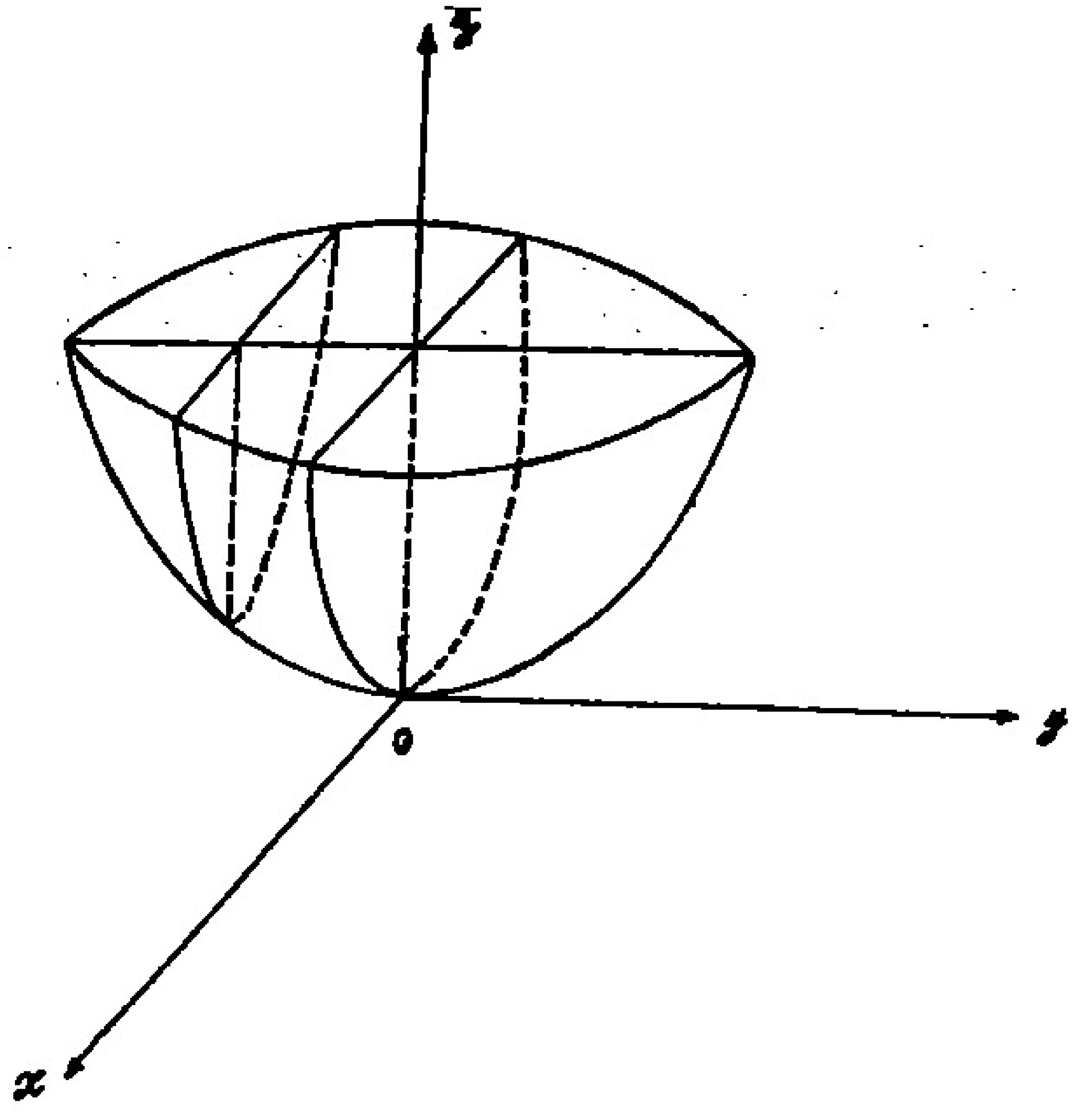
ونلاحظ أن انصاف محاور المقاطع الافقية تزداد بازديـاد h وعندما $h=0$ فان المقطع يصبح نقطة هي النقطة o وبالتالـي xoy يمس المجسم عند o . أما من اجل $h<o$ فان المعادلتين (5.7.6) تعرفان لنا قطعا ناقصا وهميا أي المستوي $z=h$ في هذه الحالـة لا يقطع هذا المجسم .

نستنتج من هذه الدراسة ان مجسم القطع المكافئ الناقصـي هو مجسم يقبل مستوي تناظر متعامدين هما المستويان xoz , yox في جملة المحاور الاحداثية المختارة ونسمي النقطة o ذروة هـذا المجسم والعددان q,p هما وسيطا المجسم شكل (٤٥) وفي حالة تساوي الوسيطين فان المقاطع الافقية تكون دوائر مركزها على المحـور oz والمجسم يدعى في هذه الحالة مجسم قطع مكافئ دوراني . اما اذا اعتبرنا الاشارة (ـ) في المعادلة (5.7.2) فنحصل على مجسم يناظر المجسم السابق بالنسبة للمستوي xoy .

٢ـ مجسم القطع المكافئ الزائدي :

معادلة هذا المجسم هي : $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ حسب (5.7.3)

حيث $q>0\ ,\ p>0$.



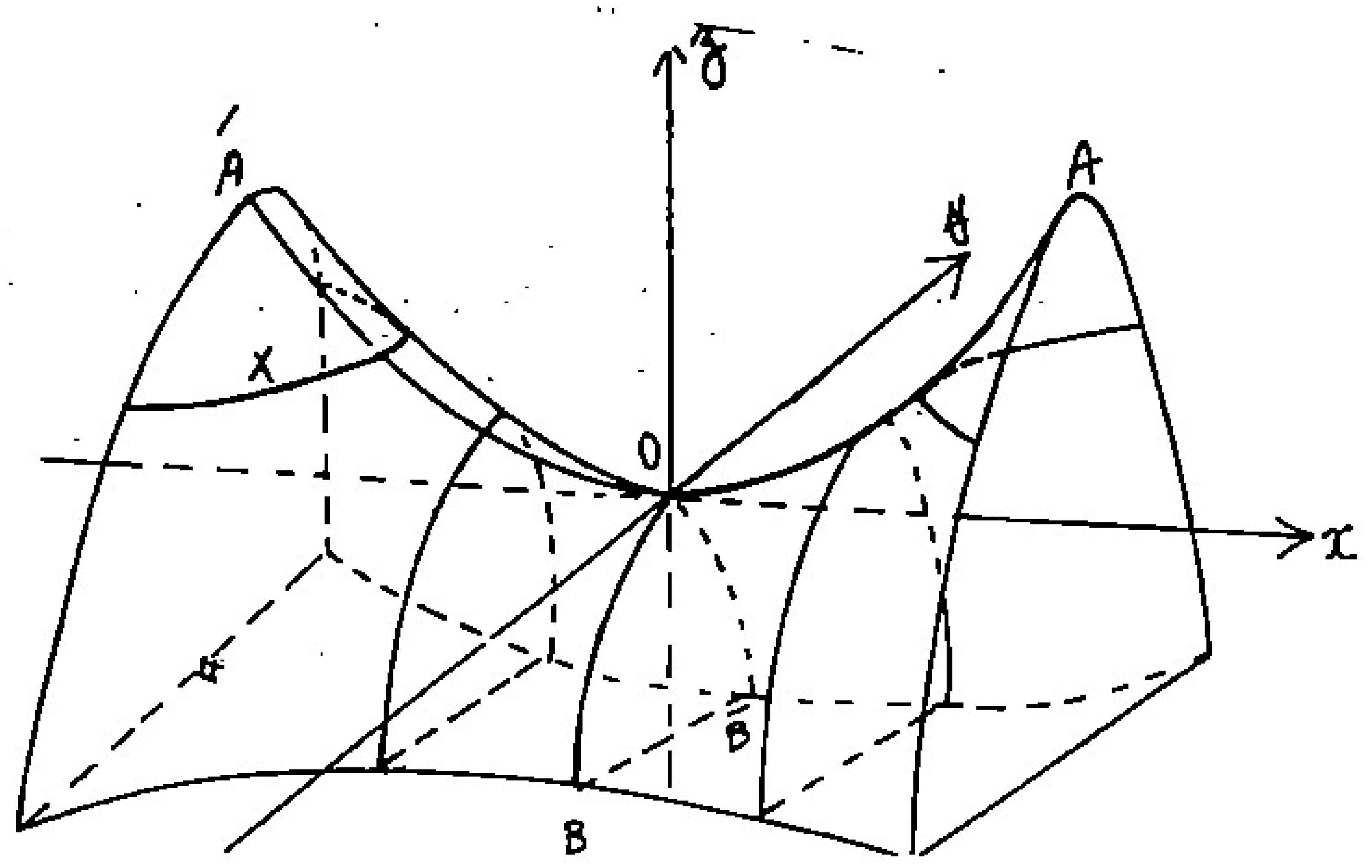
شكل (٤٥)

ولندرس هذا المجسم من طريق المقاطع المختلفة له :

آ ـ ان مقطع هذا المجسم بالمستوي xoz معرف بالمعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 2pz \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.7.8)$$

نلاحظ ان هذا المنحني عبارة عن قطع مكافئ واقع في المستوي xoz متناظر بالنسبة للمحور oz وذروته في مبدأ الاحداثيات ووسيطه p وتقعره نحو الصادات الموجبة وهو المنحني A'oA في الشكل (٤٦).



شكل (٤٦)

ب ـ لنأخذ الان مقاطع المجسم بمستويات توازي المستوي yoz فكل مستو من هذه المستويات معادلته من الشكل x=h ومقطع المجسم بأخذ هذه المستويات معين بالمعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{h^2}{p} - \frac{y^2}{q} &= 2z \\ x &= h \end{aligned}\right\} \qquad (5.7.9)$$

يمكن ان نرى بسهولة انه من اجل اي قيمة لـ h فان المستوي x = h يقطع المجسم وفق قطع مكافئ تقعره نحو الاسفل ومتناظر بالنسبة للمستوي xoz . وواضح من المعادلة الاولى من (5.7.9) ان جميع هذه القطوع المكافئة لها نفس الوسيط q وان ذروة كل قطع مكافئ

من هذه القطوع تقع على منحني تقاطع المجسم مع المستوي xoz . شكل(٤٦) اي تقع هذه الذروات على القطع المكافىء الذي تقعره نحو الاعلى والمعين بالمعادلتين (5.7.8) .

جـ ـ لنأخذ الان مقاطع المجسم بمستويات توازي المستوي xoz التي معادلتها $y=h$ ومقطع المجسم بأحد هذه المستويات معين بالمعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p} - \frac{h^2}{q} &= 2z \\ y &= h \end{aligned}\right\} \qquad (5.7.10)$$

نجد بسهولة من (5.7.10) ان كل مستو $y = h$ يقطع المجسم وفق قطع مكافىء تقعره نحو الاعلى ،وبحالة خاصة من اجل $h = 0$ فان المقطع هو المقطع الوارد في المعادلتين (5.7.8) في أول هذه الفقرة.

د ـ لنأخذ مقاطع المجسم بمستويات توازي المستوي zoy فكل مستو من هذه المستويات معادلته من الشكل $z=h$ ،ومقطع المجسم بأحد هذه المستويات معين بالمعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} &= 2h \\ z &= h \end{aligned}\right\} \qquad (5.7.11)$$

نلاحظ بسهولة أن المستوي $z = h$ يقطع المجسم وفق قطوع زائدة متناظرة بالنسبة الى المستويين xoz , yoz .

فاذا كان $h > 0$ فان هذه القطوع الزائدة تقطع المستوي xoz
واذا كان $h<0$ فان هذه القطوع الزائدة تقطع المستوي yoz

وعندما $h = 0$ يتحول المقطع الى مستقيمين معادلتاهما :

$$\frac{x}{p} = \pm \frac{y}{q}$$

واقعين في المستوي xoy . وقد بينا في الشكل(٤٦) مقطع المجسم بالمستوي $z=h$ حيث $h>0$.

نستنتج مما تقدم شكل مجسم القطع المكافىء الزائدي المبين في الشكل(٤٦) هذا المجسم يقبل مستويي تناظر متعامدين هما في جملة المحاور المختارة مستويات الاحداثيات yoz,xoz ونسمي النقطة o ذروة المجسم ،والعددان الموجبان q,p يدعيان وسيطي المجسم .

ملاحظة :

نسمي المقطعين للمجسم بالمستويين $x=0$, $y=0$ بالمقطعين الرئيسيين للمجسم وهما في الشكل(٤٦) القطعان المكافئان A'OA,B'OB ويمكن توليد هذا المجسم اذا ثبتنا احد المقطعين الرئيسيين وليكن A'OA وتنقلت ذروة الاخر B'OB عليه توازيا مع وضعه الاساسي في المستوي yoz وبالعكس .

مثال :

ليكن السطح $9x^2 - 4y^2 = 36z$

نلاحظ ان هذا السطح متناظر بالنسبة للمستويين xoz,yoz وبالنسبة للمحور oz ،مقطع هذا المجسم بالمستوي xoy يتألف من مجموعة المستقيمين :

$$3x-2y=0 \ , \quad 3x+2y = 0 \qquad \text{أي} \qquad 9x^2-4y^2 = 0$$

من اجل $y=0$ فان مقطع السطح بالمستوي xoz هو القطع المكافئ $9x^2 = 36z$ او $x^2 = 4z$ هذا القطع ذروته في نقطة الاصل وتقعره نحو الاعلى .

ومن اجل $x=0$ فان مقطع السطح بالمستوي yoz هو القطع المكافئ $-4y^2 = 36z$ او $y^2 = -9z$ هذا القطع ذروته في نقطة الاصل وتقعره نحو الاسفل .

ومقاطع هذا السطح بالمستوي $z=h$ هي مجموعة من القطوع الزائدة.

اذا كانت $h>0$ فان المحور القاطع لكل من هذه القطوع يوازي المحور ox .

واذا كانت $h<0$ فان المحور القاطع لكل من هذه القطوع يوازي المحور oy .

كذلك مقاطع السطح بمستويات موازية للمستوي xoz أو المستوي yoz هي قطوع مكافئة . وبالتالي فان هذا السطح هو مجسم قطع مكافئ زائدي .

(5:8) — الاسطوانات من الدرجة الثانية (أوالاسطوانات التربيعية):

اذا كانت جميع أمثال احد المجاهيل معدومة ،ولتكن أمثال z معدومة فان المعادلة العامة للسطوح من الدرجة الثانية تصبح بالشكل :

$$a_1x^2+a_2y^2+2b_3xy+2c_1x+2c_2y + d = 0 \qquad (5.8.1)$$

فالسطوح المعينة بهذه المعادلة هي سطوح اسطوانية مولداتها توازي المحور oz اما في الهندسة المستوية فهذه المعادلة تمثل منحنيات من الدرجة الثانية . فاذا اجرينا انسحابا ودورانا لجملة المحاور الاحداثية فان هذه المعادلة تختزل الى الشكل :-

$$Ax^2+ By^2+ D = 0 \qquad (5.8.2)$$

وهذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$\frac{x^2}{\frac{-D}{A}} + \frac{y^2}{\frac{-D}{B}} = 1$$

وهنا نميز عدة حالات :

آ — اذا كان المخرجان موجبين فالمعادلة تصبح من الشكل :-

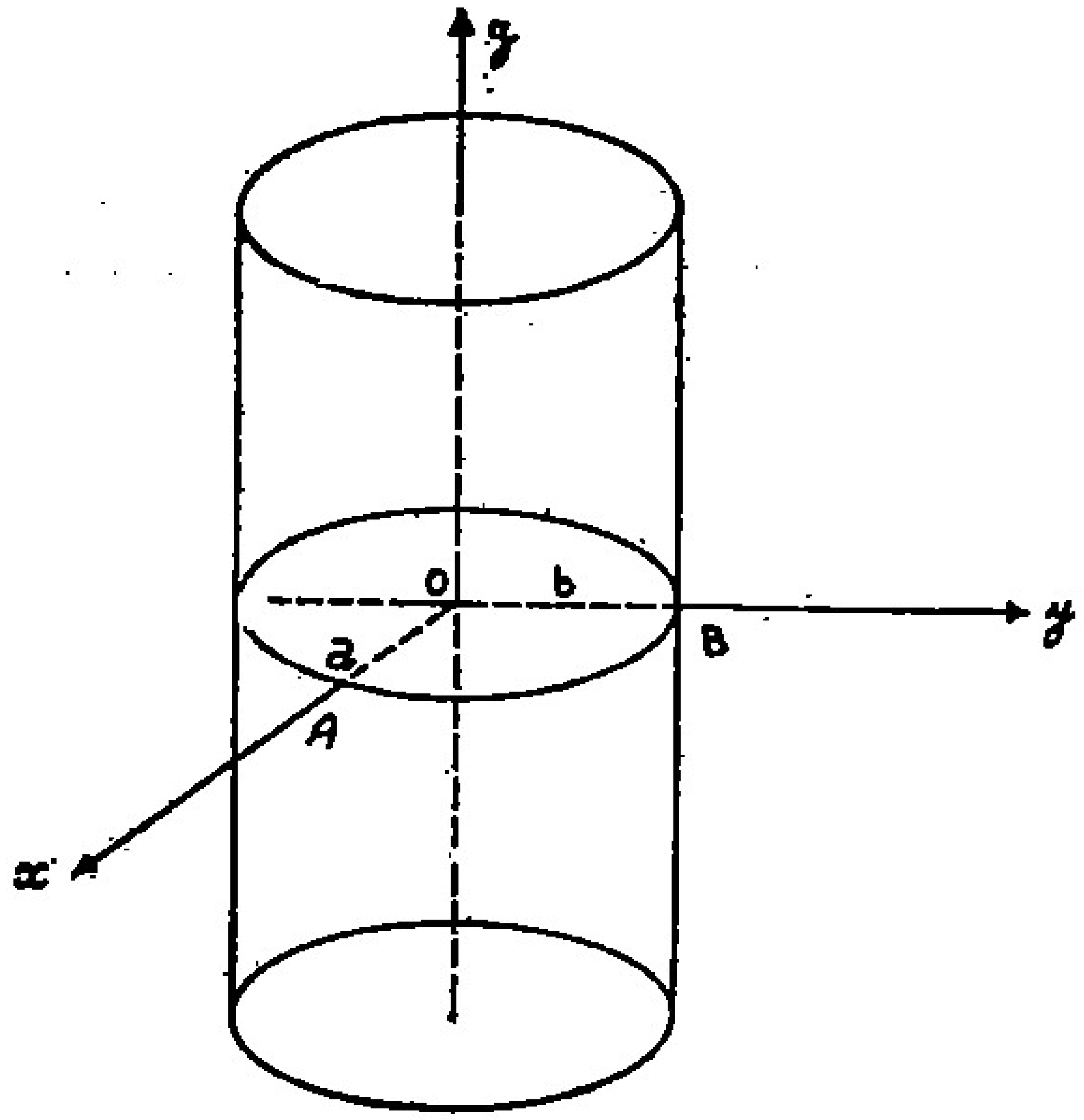
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.8.3)$$

نسمي هذا السطح بالسطح الاسطواني الناقصي (أو اسطوانة دليلها قطع ناقص) مولداته توازي oz شكل(٤٧).

وعندما $a= b$ يصبح السطح اسطوانية دورانية .

ب — اذا كان المخرجان من اشارتين مختلفتين تصبح من الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.8.4)$$



شكل (٤٧)

نسمي هذا السطح بالسطح الاسطواني الزائدي (او اسطوانة دليلها قطع زائد) مولداته توازي oz شكل(٤٨).

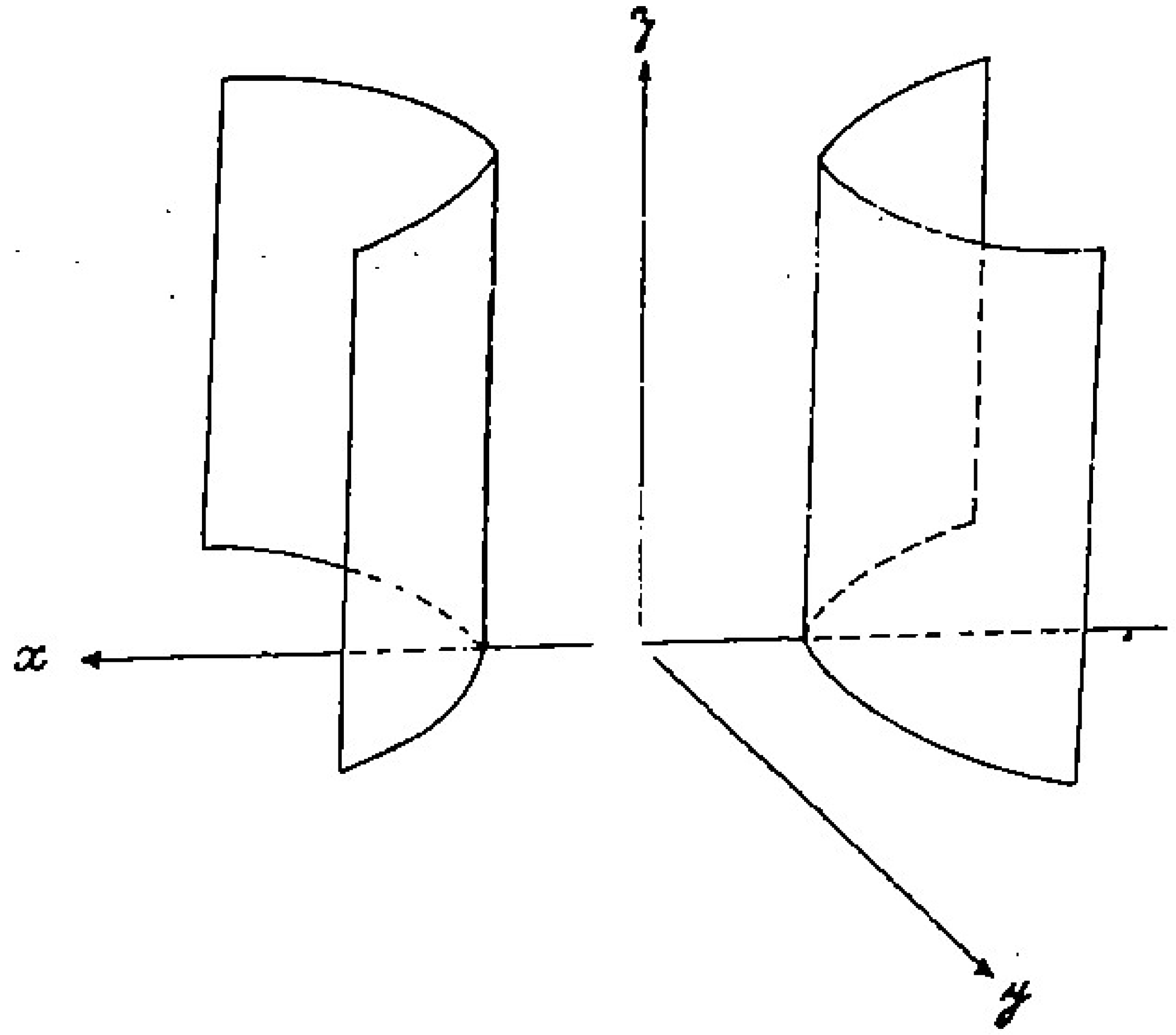
ج ـ وان كان المخرجان سالبين تصبح المعادلة من الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (5.8.5)$$

وعند هذه المعادلة لا تمثل سطحا حقيقيا بل تمثل اسطوانة وهمية.

د ـ اذا استطعنا باختيار مناسب لجملة المحاور الاحداثية ان نرد المعادلة (5.8.1) الى الشكل :

$$y^2 = 2px$$



شكل (٤٨)

عندئذ نسمي هذا السطح بالسطح الاسطواني المكافئي (اسطوانة دليلها قطع مكافئ) (٤٩).

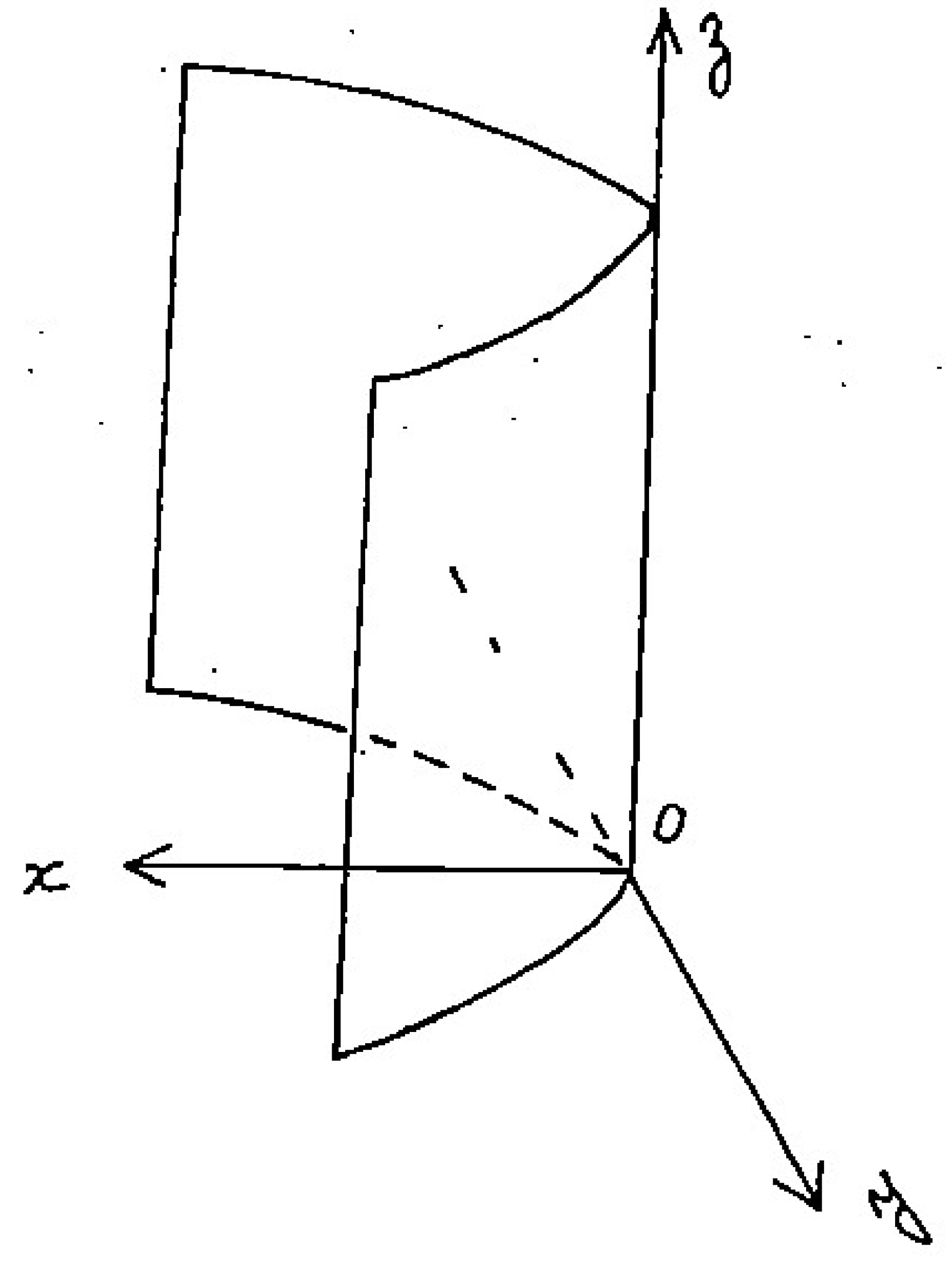
هـ ـ في المعادلة(5.8.2) اذا كان D = 0 وكان A , B من اشارتين مختلفتين . عندئذ ترد الى الشكل :

$$p^2x^2 - q^2y^2 = 0 \qquad (5.8.7)$$

او :

$$(px+qy)\ (px-qy) = 0$$

عندئذ الاسطوانة تتحول الى مجموعة مستويين قطعهما المشترك oz .



شكل (٤٩)

(5.9) – السطوح المسطرة والتوليد المستقيمي لمجسم المقطع الزائد ذي الفرع الواحد ولمجسم القطع المكافىء الزائدي :

نقول عن السطح (S) انه سطح مسطر اذا أمكن توليده بواسطة مستقيم كالمخروط والاسطوانة • الا أنه يوجد سطوح من الدرجة الثانية لا تبدو لاول نظرة لها بأنها سطوح مسطرة بل يمكن البرهان جبريا على امكانية توليدها بواسطة المستقيم كمجسم القطع الزائد ذي الفرع الواحد ،ومجسم القطع المكافىء الزائدي • وسنبرهن في هذين المجسمين أن كل نقطة من المجسم يمر منها مستقيمان مولدان •

١– توليد مجسم القطع الزائد ذي الفرع الواحد :

وجدنا في الفقرة (5.5) أن المعادلة النموذجية لمجسم المقطع الزائدذي الفرع الوحيد هي :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

أو بالشكل :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \quad (5.9.1)$$

لنعتبر الان مجموعة المعادلتين من الدرجة الاولى :

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \quad (5.9.2)$$

نلاحظ ان جملة هاتين المعادلتين تعين مجموعة من المستقيمات اذ كل قيمة للوسيط تعين مستقيما فاذا ضربنا المعادلتين السابقتين طرفا بطرف نحصل على المعادلة (5.9.1) وهي معادلة السطح• فاذا كانت M (x,y,z) نقطة من المستقيم المعين بالمعادلتين (5.9.2) فان احداثياتها تحقق معادلة السطح (5.9.1) وبالتالي النقطةM تقع على السطح • فكل نقطة من المستقيم (5.9.2) هي نقطة من السطح (5.9.1) وبالتالي المستقيم (5.9.2) يقع على السطح(5.9.1)•

ولنبرهن الان ان كل نقطة من سطح المجسم المعين بالمعادلة (5.9.1) يمر منها مستقيم واحد فقط من مستقيمات المجموعة (5.9.2).

لتكن النقطة $M_o(x_o, y_o, z_o)$ من المجسم (5.9.1) عندئذ يكون :

$$\left(\frac{x_o}{a}+\frac{z_o}{c}\right)\left(\frac{x_o}{a}-\frac{z_o}{c}\right)=\left(1+\frac{y_o}{b}\right)\left(1-\frac{y_o}{b}\right) \qquad (5.9.3)$$

ولنفتش الان عن قيمة λ التي من اجلها يمر مستقيم من المجموعة (5.9.2) بالنقطة M_o .

بتعويض احداثيات هذه النقطة في الجملة (5.9.2) نجد :

$$\left(\frac{x_o}{a}+\frac{z_o}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y_o}{b}\right) \qquad (5.9.4)$$

$$\left(\frac{x_o}{a}-\frac{z_o}{c}\right)=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y_o}{b}\right) \qquad (5.9.5)$$

من المعادلة (5.9.4) نحسب قيمة λ :

$$\lambda=\frac{\frac{x_o}{a}+\frac{z_o}{c}}{1+\frac{y_o}{b}} \qquad (5.9.6)$$

شريطة : $1+\frac{y_o}{b}\neq 0$

ان هذه القيمة لـ λ تحقق المعادلة (5.9.2) لان تعويض λ في هذه المعادلة يعطي العلاقة (5.9.3) .

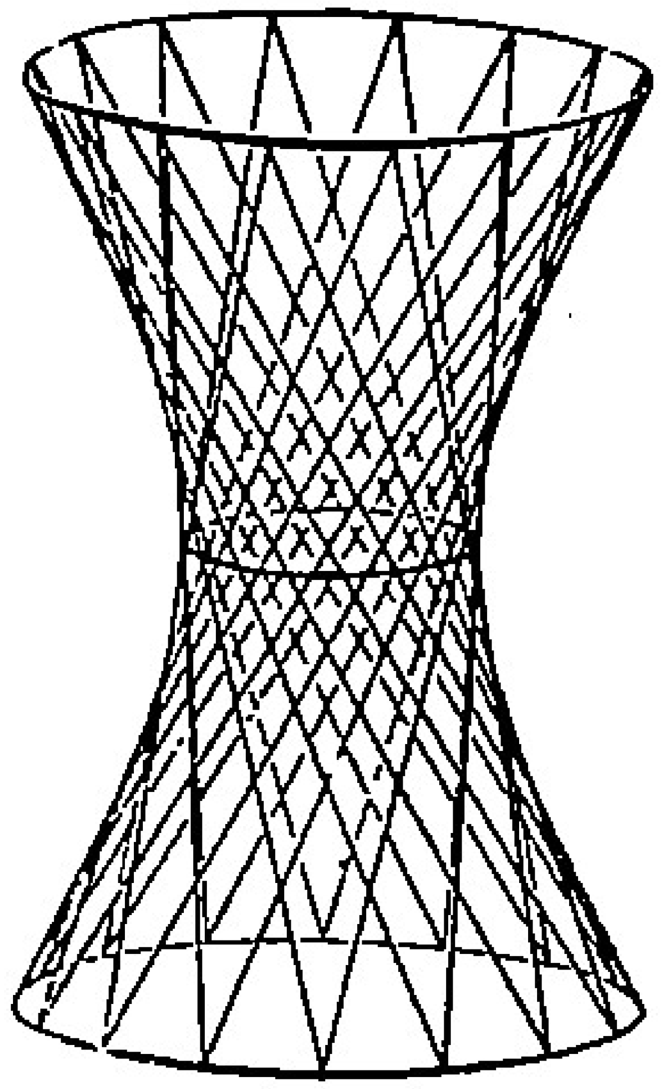
والان اذا عوضنا قيمة λ في جملة المعادلتين (5.9.2) عندئذ يتعين لدينا مستقيم واحد يمر بالنقطة M_o ، اما اذا كان $1+\frac{y_o}{b}=0$ عندئذ نحسب λ من المعادلة (5.9.4) ونبرهن بصورة مماثلة ان قيمة λ المحسوبة تحقق المعادلة (5.9.4) وبالتالي نكون قد برهنا على مرور مستقيم وحيد من المجموعة (5.9.2) بالنقطة M_o .

نسمي مجموعة المستقيمات (5.9.2) بالمجموعة الاولى للمستقيمات المولدة لمجسم القطع الزائد ذي الفرع الواحد، وبذلك نكو قد برهنا ان السطح هو سطح مسطر .

بالاضافة الى ما سبق يمكن أن نبرهن على وجود مجموعة ثانية من المستقيمات المولدة لهذا المجسم اذ يمكن اعتبار مجموعة المستقيمات :

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (5.9.7)$$

مجموعة مولدة ايضا للمجسم وهي مغايرة للمجموعة (5.9.2) ويمكن أن نبرهن بنفس الطريقة أن لكل نقطة مثل M_o من المجسم يمر مستقيم وحيد من المجموعة الثانية. فنقاط السطح المجسم تتألف اذن من تقاطع المستقيمات في المجموعتين مثنى مثنى شكل (٥٠).



شكل (٥٠)

كذلك الامر بالنسبة لمجسم القطع المكافىء الزائدي الـــذي معادلته النموذجية :

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (5.9.8)$$

يمكن أن نبرهن أن هذا المجسم تولده مجموعتان من المستقيمات

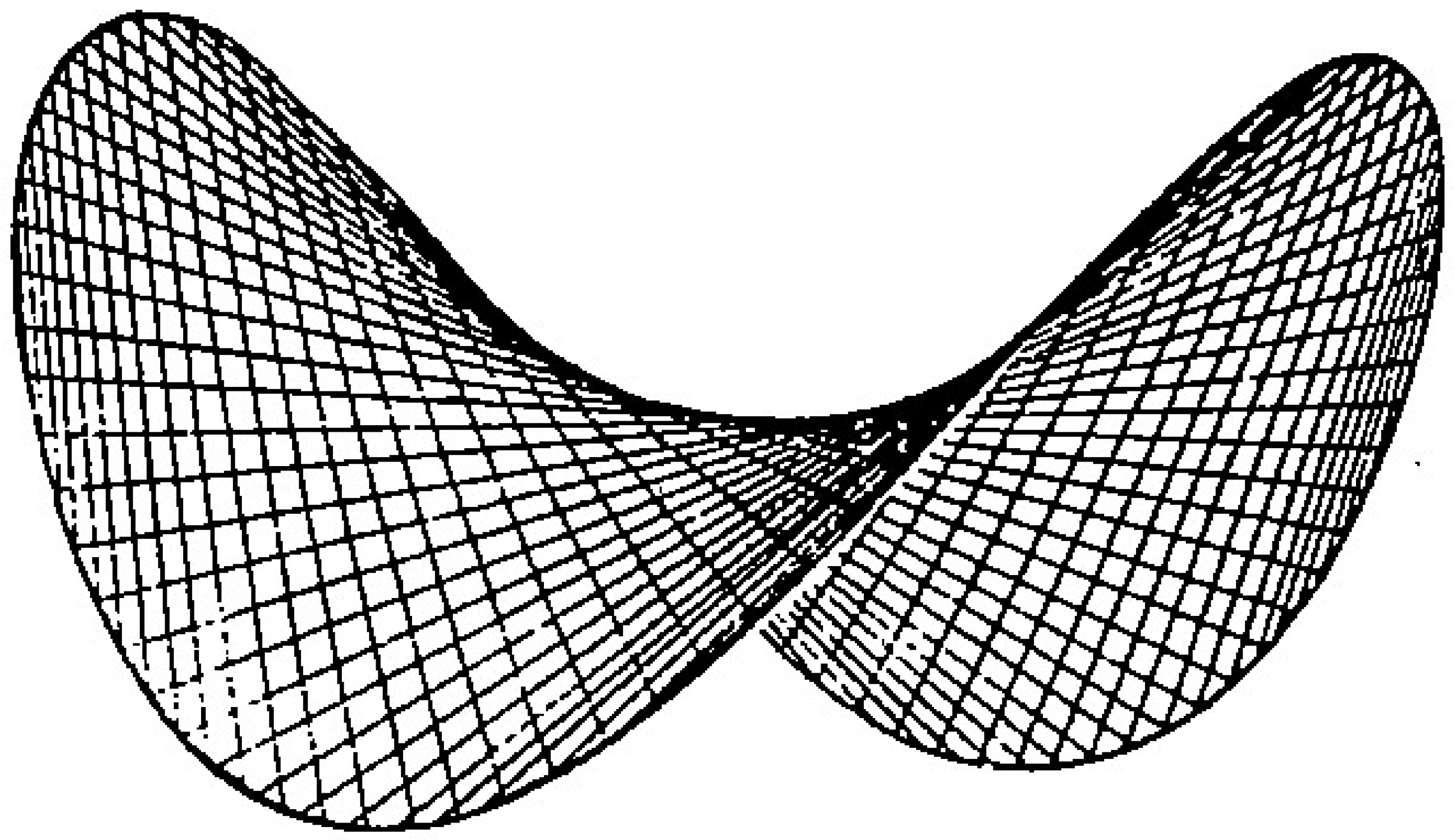
المجموعة الاولى :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= 2\lambda z \\ \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (5.9.9)$$

والمجموعة الثانية :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= 2\mu z \\ \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= \frac{1}{\mu} \end{aligned}\right\} \qquad (5.9.10)$$

كما في الشكل (٥١).



شكل (٥١)

تمارين (٥)

١- اثبت أن المعادلات الاتية هي معادلاتها مجسمات قطوع ناقصة. عيّن مركز وأنصاف المحاور لكل منها :

a) $x^2 + 16y^2 + z^2 - 4x + 32y - 5 = 0$

b) $3x^2 + 4y^2 + z^2 - 12x - 16y + 4z - 4 = 0$

c) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4x - 8y + 8z + 15 = 0$

d) $3x^2 + y^2 + 2z^2 + 3x + 3y + 4z = 0$

٢- عيّن مركز كل من السطوح الاتية وعيّن نوع كل منها :

a) $2x^2 - 2y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z - 10 = 0$

b) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4x - 4y - 6z - 9 = 0$

c) $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y - 27 = 0$

d) $2x^2 - y^2 - 3z^2 - 8x - 6y + 24z - 9 = 0$

٣- أثبت المعادلات الاتية تمثل مجسمات قطوع مكافئة وعيّن ذروة كل منها :

a) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 12y + 3z + 23 = 0$

b) $2x^2 + 4z^2 - 4x - 24z - y + 36 = 0$

c) $3z^2 + 5y^2 - 2x + 10y - 12z + 21 = 0$

d) $y^2 - 4x^2 + 2z - 6y - 12x + 6 = 0$

٤- أوجد المعادلة النموذجية لكل من مجسمات القطوع الناقصة اذا علمت أنها تمر بالنقاط :

a) $(2,-1,1)$, $(-3,0,0)$, $(1,-1,2)$

b) $(\sqrt{3},1,1)$, $(1,\sqrt{3},-1)$, $(-1,-1,\sqrt{5})$

c) $(2,2,2)$, $(3,1,\sqrt{3})$, $(-2,0,4)$

d) $(1,3,4)$, $(3,1,-2\sqrt{2})$

علما بأنه دوراني حول oz .

٥- أوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين $(3,2,4)$ و$(0,3,0)$ يساوي 8 وعيّن طبيعة هذا المحل الهندسي .

٦- أوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين $(3,2,4)$ و$(3,2,-4)$ يساوي 10 وعيّن طبيعة هذا المحل الهندسي .

٧- أوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي بعدها عن المستوي yoz يساوي ضعف بعدها عن النقطة $(1,-2,2)$.

٨- أوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي بعدها عن المحور ox يساوي ثلاثة امثال بعدها عن النقطة $(2,-3,3)$.

٩- اوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي فصل بعديها عن النقطتين $(0,0,3)$ و$(0,0,-3)$ يساوي 4 ،ثم عيّن نوع هذا المحل ومركزه .

١٠- اوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي فصل بعديها عن النقطتين $(2,-3,4)$ و $(2,3,4)$ يساوي 5 ، ثم عيّن نوع هذا المحل ومركزه .

١١- اوجد معادلة مجسم قطع مكافئ ذروته النقطة o ومحوره oz ويمر بالنقطتين $(3,0,1),(3,2,2)$. توجيه: استخدم المعادلة

$$Ax^2+By^2=cz$$

١٢- اوجد معادلة مجسم قطع مكافئ ذروته النقطة o ومحوره oy ويمر بالنقطتين $(1,-2,1),(-3,-3,2)$.

١٣- عيّن مستويات ومحور تناظر السطح :

$$9x^2-4y^2=36z$$

ثم عيّن طبيعته وذلك بأخذ المقاطع المختلفة له .

١٤- عيّن معادلات المساقط القائمة على المستويات الاحداثية لمنحني تقاطع مجسم القطع المكافئ الناقص $y^2+z^2=x$ مع المستوي $x+2y-z=0$.

١٥- اوجد معادلتي المستويين المماسين للسطح :

$$2x^2-6y^2+3z^2-5=0$$

اللذين يمران بالمستقيم :

$$x+9y-3z=0$$

$$3x-3y+6z-5=0$$

ثم أوجد نقطتي التماس .

١٦- اوجد الشرط اللازم كي يمس المستوي :

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=0 \qquad ax^2+by^2+cz^2+d=0$$

ثم اوجد معادلتي المستويين المماسين للسطح :

$$2x^2+y^2+4z^2-10=0$$

اللذين يوازيان المستوي :

$$x-y-2z=0$$

١٧- اوجد الشرط اللازم كي يكون المستقيم :

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}=r$$

احد مولدات مجسم القطع المكافئ :

$$ax^2+by^2=2z$$

ثم اوجد مولدي السطح :

$$4x^2-9y^2=2z$$

اللذين يمران بالنقطة $(6,4,0)$.

الفصل السادس

الـــــــــكرة

تعريـف :

الكرة هي المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي تبعــــد من نقطة ثابتة $C(a,b,c)$ بعد ثابتا R • النقطة الثابتة تدعــى مركز الكرة ،والبعد الثابت يدعى نصف قطر الكرة• علما بأن كلمـــة كرة في هذا البحث تدل على سطح الكرة•

(6.1) ـ المعادلة الديكارتية للكرة :

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من سطح الكرة (S) التي مركزهـــا $C(a,b,c)$ ونصف قطرها R ففي جميع اوضاع M على سطح الكــرة يكون : $\overline{CM}^2 = R^2$ ونعبر من هذه الخاصة المميزة لسطح الكـــــرة تحليليا بالمعادلة :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2= R^2 \qquad (6.1.1)$$

هذه المعادلة هي المعادلة الديكارتية للكرة،وتكتب بالشكل

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \qquad (6.1.2)$$

حيث $d=a^2+b^2+c^2-R^2$ هي كمية ثابته •

نلاحظ من المعادلة الاخيرة أن هذه المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية في المجاهيل x,y,z وتتمتع بالخاصتين الآتيتين:

١- امثال الحدود المربعة متساوية•

٢- امثال الحدود المستطيلة معدومة•

وبحالة خاصة اذا كان مركز الكرة هو مبدأ الاحداثيات ، فان معادلتها تكون :

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (6.1.3)$$

وسنبرهن الان : ان كل معادلة من الدرجة الثانية تتمتع بهاتين الخاصيتين هي معادلة الكرة •

أي أن كل معادلة من الشكل :

$$S(x,y,z)\equiv Ax^2+Ay^2+Az^2+2C_1x+2C_2y+2C_3z+D=0 \qquad (6.1.4)$$

هي معادلة كرة • هذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2C_1}{A}x+\frac{2C_2}{A}y+\frac{2C_3}{A}z+\frac{D}{A}=0$$

حيث : $A\neq 0$

والمعادلة الاخيرة تكتب بالشكل :

$$\left(x+\frac{C_1}{A}\right)^2+\left(y+\frac{C_2}{A}\right)^2+\left(z+\frac{C_3}{A}\right)^2=\frac{C_1^2+C_2^2+C_3^2}{A^2}-\frac{D}{A}=H$$

نلاحظ من هذه المعادلة أن الطرف الايسر يمثل مربع بعد النقطة $M(x,y,z)$ المتحولة من النقطة الثابتة $M_0\left(-\frac{C_1}{A},-\frac{C_2}{A},-\frac{C_3}{A}\right)$ ويساوي للمقدار الثابت H في الطرف الايمن • فاذا كانت H موجبة فان المحل الهندسي للنقطة M هو سطح كرة حقيقية نصف قطرها $R=\sqrt{H}$، وان كانت H سالبة عندئذ يكون نصف قطر هذه الكرة تخيليا ونقول عندئذ ان الكرة عقدية أو وهمية • اما اذا كانت $H=0$ عندئذ يكون نصف قطر الكرة معدوما وبالتالي فالمعادلة تمثل نقطة المركز • فالمعادلة (6.1.4) تدعى بالمعادلة العامة للكرة كما أن المعادلة (6.1.1) تدعى بالشكل النموذجي لمعادلة الكرة•

وسنرمز للطرف الايسر من المعادلة العامة للكرة بالرمز $S^*(x,y,z)$ عندما تكون امثال الحدود المربعة مساوية للواحد •

أي :

$$S^*(x,y,z)\equiv\frac{S(x,y,z)}{A}$$

والمعادلة العامة للكرة تكتب بالشكل :

$$S^*(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2C_1x+2C_2y+2C_3z+d=0 \qquad (6.1.5)$$

مركز الكرة هي النقطة $(-C_1,-C_2,-c_3)$ ومربع نصف قطرها هو :

$$R^2=C_1^2+C_2^2+C_3^2-d$$

(6.2) – المعادلات الوسيطية للكرة:

وجدنا في الفقرة (4.2) ان المعادلات الوسيطية لكرة مركزها مبدأ الاحداثيات o هي :

$$x = R.\mathrm{Sin}\,v.\mathrm{Cos}\,u \quad ; \quad y = R.\mathrm{Sin}\,v.\mathrm{Sin}\,u \quad ; \quad z = R.\mathrm{Cos}\,v$$

حيث

$$v \in [0,\pi] \quad , \quad u \in [0,2\pi[$$

اما اذا كان مركز الكرة في النقطة $C(a,b,c)$ فان دساتيـر الانسحاب تعطي :

$$\begin{aligned} x &= a + R.\mathrm{Sin}\,v.\mathrm{Cos}\,u \\ y &= b + R.\mathrm{Sin}\,v.\sin u \\ z &= c + R.\mathrm{Cos}\,v \end{aligned} \qquad (6.2.1)$$

فالمعالات (6.2.1) هي المعادلات الوسيطية للكرة التي مركزها $C(a,b,c)$ ونصف قطرها R .

نرى بسهولة أنه بحذف الوسيطين v,u من المعادلات (6.2.1) نحصل على الشكل النموذجي لمعادلة الكرة .

مثال(١) :

اكتب معادلة كرة مركزها $C(1,2,-1)$ ونصف قطرها $R = 2$.

الحل :

بتطبيق الدستور (6.1.1) نجد :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$$

منه :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 2 = 0$$

مثال(٢) :

عيّن مركز ونصف قطر الكرة التي معادلتها :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$$

الحل :

بالمقارنة مع المعادلة (6.1.2) نجد :

$$a = 2\ ,\ b = -1\ ,\ c = 3$$

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d = 16$$

ومنه : $R = 4$

(6.3) - معادلة كرة تمر بأربع نقاط :

بفرض :

$$M_4(x_4, y_4, z_4) \ ,\ M_3(x_3, y_3, z_3) \ ,\ M_2(x_2, y_2, z_2) \ ,\ M_1(x_1, y_1, z_1)$$

اربع نقاط معلومة ولنوجد معادلة كرة تمر بهذه النقاط .
من المعادلة العامة للكرة :

$$S^*(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + d = 0$$

اذا عوضنا احداثيات النقاط الاربع في هذه المعادلة نحصل على اربع معادلات خطية في المجاهيل $C_1, C_2, C_3,\ d$ هي :

$$S_1^*(x_1, y_1, z_1) = 0 \; ; \; S^*(x_2, y_2, z_2) = 0 \; ; \; S^*(x_3, y_3, z_3) = 0 \; ; \; S^*(x_4, y_4, z_4) = 0$$

ونكون أمام ثلاث حالات :

١- اذا وجد لجملة المعادلات الخطية الاربعة حل وحيد عندئذ مرت بالنقاط الاربعة كرة وحيدة معينة بالثوابت المعلومة (C_1, C_2, C_3, d) وفي هذه الحالة تكون النقاط الاربعة غير واقعة في مستو واحد .

٢- اذا كانت جملة المعادلات مستحيلة الحل عندئذ تقع النقاط الاربعة في مستو واحد دون ان تقع على محيط دائرة واحدة، وبالتالي لا تمر من هذه النقاط أي كرة.

٣- اذا كان لجملة المعادلات عدد لا متناه من الحلول عندئذ تقع النقاط الاربعة على محيط دائرة واحدة وبالتالي يمر من هذه النقاط الاربعة عدد لامتناه من الكرات مراكزها تقع على محور هذه الدائرة.

مثال (١) :

أوجد معادلة كرة تمر بالنقاط :

$$M_1(1,1,1) \; , \; M_2(1,2,1) \; , \; M_3(1,1,2) \; , \; M_4(2,1,1)$$

الحل :

من المعادلة العامة للكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + d = 0$$

نعوض احداثيات النقاط الاربعة في هذه المعادلة نحصل على المعادلات الاتية :

$$2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + d + 3 = 0 \qquad (1)$$
$$2C_1 + 4C_2 + 2C_3 + d + 6 = 0 \qquad (2)$$
$$2C_1 + 2C_2 + 4C_3 + d + 6 = 0 \qquad (3)$$
$$4C_1 + 2C_2 + 2C_3 + d + 6 = 0 \qquad (4)$$

بحل هذه المعادلات نجد :

$$C_1 = -\frac{3}{2} \; , \; C_2 = -\frac{3}{2} \; , \; C_3 = -\frac{3}{2} \; , \; d = 6$$

ومعادلة الكرة هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$$

مثال(٢) :

أوجد معادلة كرة تمر بالنقاط :

$$M_1(0,0,0) \; , \; M_2(1,0,0) \; , \; M_3(0,2,1) \; , \; M_4\left(\frac{1}{2} , 1 , \frac{1}{2}\right)$$

الحل :

بالتعويض في المعادلة العامة للكرة نجد :

$$d = 0$$
$$2C_1 + d + 1 = 0 \qquad (1)$$
$$4C_2 + 2C_3 + d + 5 = 0 \qquad (2)$$
(3)

$$C_1 + 2C_2 + C_3 + d + \frac{3}{2} = 0 \qquad (4)$$

من (1) و(2) نجد $C_1 = -\frac{1}{2}$ بالتعويض في (3)،(4)

نجد :

$$4C_2 + 2C_3 = -5$$

$$2C_2 + C_3 = -1$$

وهذه الجملة الاخيرة مستحيلة لذلك فالنقاط الاربعة تقع في مستو واحد دون أن تقع على محيط دائرة واحدة وبالتالي لاتمر بهذه النقاط أي كرة.

مثال(٢):

اوجد معادلة كرة تمر من النقاط :

$M_1(0,0,0)$ ، $M_2(3,0,0)$ $M_3(1,1,1)$ $M_4(2,1,1)$

الحل :

نعوض في المعادلة العامة للكرة نجد :

$$d = 0 \qquad (1)$$

$$6C_1 + d + 9 = 0 \qquad (2)$$

$$2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + d + 3 = 0 \qquad (3)$$

$$4C_1 + 2C_2 + 2C_3 + d + 6 = 0 \qquad (4)$$

من (1)،(2) نجد $C_1 = -\frac{3}{2}$ ، بالتعويض في (3)،(4)

نجد :

$$2C_2 + 2C_3 = 0$$

$$2C_2 + 2C_3 = 0$$

هذه الجملة لها عدد لا متناه من الحلول لان C_3, C_2 لم يتعينا تماما بل ارتبط بالعلاقة $C_2 = -C_3$ وبالتالي يمر من النقاط الاربعة مجموعة من الكرات معادلتها :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2C_2y - 2C_2z = 0$$

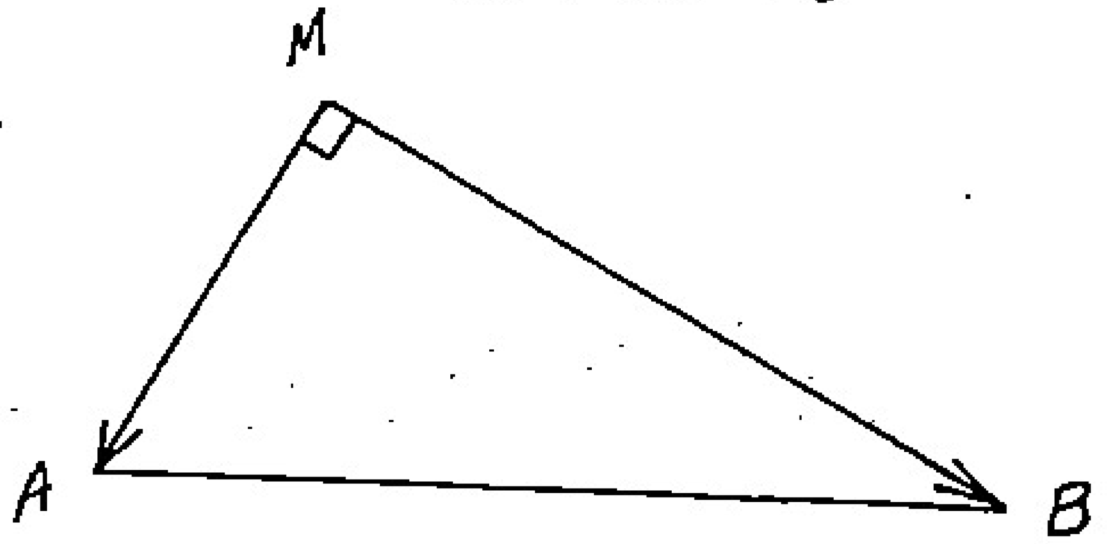
والنقاط الاربعة تقع على محيط دائرة.

(6.4) ـ معادلة كرة علم نهايتا قطر فيها :

بفرض $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ نهايتا القطر AB في الكرة S لنوجد معادلة هذه الكرة :

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة على سطح الكرة S ، في جميع أوضاع النقطة M على سطح الكرة يكون :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$



شكل (٥٢)

ونعبر عن هذه العلاقة تحليليا بالمعادلة :

$$(x-x_1).(x-x_2)+(y-y_1).(y-y_2)+(z-z_1).(z-z_2)=0 \qquad (6.4.1)$$

بفك الاقواس نرى بسهولة انها معادلة كرة .

ملاحظة :

يمكن حل هذه المسألة بطريقة ثانية ،وذلك بتعيين احداثيات النقطة C منتصف القطعة AB وحساب نصف القطر CA وتطبيق الدستور (6.1.1) .

(6.5) - الوضع النسبي لكرة ومستو :

لتكن الكرة (S) المعينة بالمعادلة :

$$S^*(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

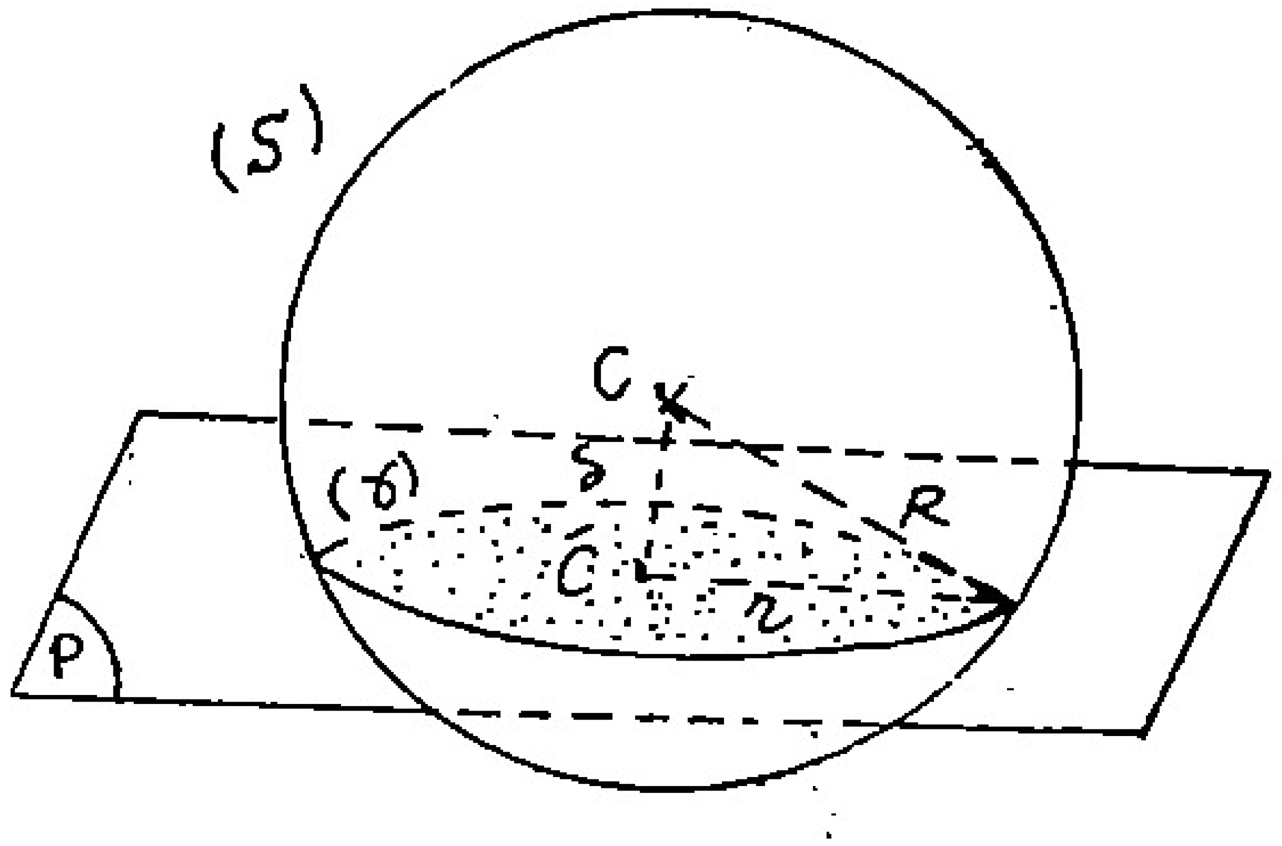
وليكن المستوي P المعين بالمعادلة :

$$P(x,y,z) \equiv px+qy+rz+h=0$$

فهذا المستوي اما ان يكون قاطعا للكرة (S) أو مماسا لها أولا يقطعها ،حسبما يكون بعد مركزها عن هذا المستوي اصغر أو يساوي او اعظم من نصف قطرها . ونعلم أن مقطع كرة بمستو ما هو محيط دائرة، واذا مر المستوي من مركز الكرة كانت دائرة التقاطع دائرة عظمى نصف قطرها يساوي نصف قطر الكرة ومركزها مركز الكرة.

ان بعد المركز C(a,b,c) عن المستوي P هو :

$$CC' = |\delta| = \frac{|P(a,b,c)|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$



شكل (٥٣)

في الشكل (٥٣) رسمنا المستوي P قاطعا للكرة (S) وفق الدائرة (γ) مركز هذه الدائرة هو النقطة C' مرتسم C على المستوي ونصف قطرها معين بالعلاقة :

$$r = \sqrt{R^2-\delta^2}$$

ونلاحظ انه في حالة التقاطع يكون $\delta < R$ أو $\delta^2 - R^2 < 0$ أي:

$$\frac{|P(a,b,c)|^2}{p^2+q^2+r^2} - R^2 < 0$$

أما في حالة التماس فان $\delta^2 = R^2$ أي :

$$\frac{|P(a,b,c)|^2}{p^2+q^2+r^2} - R^2 = 0$$

وفي حالة عدم التقاطع يكون $\delta > R$ او $\delta^2 - R^2 > 0$ أي :

$$\frac{|P(a,b,c)|^2}{p^2+q^2+r^2} - R^2 > 0$$

وخلاصة القول : لدراسة وضع كرة بالنسبة لمستو معلوم p نحسب بعد مركزها عن هذا المستوي وليكن δ ونقارن δ مع نصف قطر الكرة فاذا كان $\delta < R$ فالمستوي يقطع الكرة واذا كان $R = \delta$ فالمستوي يمس الكرة ،واذا كان $\delta > R$ فالمستوي لا يقطع للكرة.

مثال(١) :

اثبت أن المستوي :

$$P \equiv 3x + y - z - 9 = 0$$

يقطع الكرة :

$$S = (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36$$

وعيّن نصف قطر ومركز دائرة التقاطع .

الحل :

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي P . ان مركز الكرة هو النقطة $C(4,7,-1)$ وبعد المركز عن المستوي P هو :

$$\delta = \frac{|12+7+1-9|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$$

ونصف قطر الكرة : $R = 6$

وبما أن $\delta < R$ فالمستوي يقطع الكرة وفق دائرة (γ) ،نصف

قطرها :

$$r = \sqrt{R^2-\delta^2} = \sqrt{36-11} = 5$$

ولتعيين مركز الدائرة (γ) نوجد نقطة تقاطع العمود النازل من C على المستوي P ؛ معادلتا هذا العمود هما :

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-7}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

ومعادلاته الوسيطية :

$$x = 4+3t \ , \ y = 7+t \ , \ z = -1-t$$

وبالتعويض في معادلة المستوي نجد :

$$3(4+3t)+(7+t)-(-1-t)-9=0$$

ومنه $t=-1$ وبالتالي $x=1 \ , \ y=6 \ , \ z=0$

اي النقطة $C'(1,6,0)$ هي مركز الدائرة المطلوبة.

مثال (٢) :

اثبت أن المستوي $P \equiv x+2y+2z+15=0$ يمس الكرة $x^2+y^2+z^2-25=0$ ثم عيّن احداثيات نقطة التماس .

الحل :

ان مركز الكرة (S) هو $C(0,0,0)$.

$$\delta = \frac{|15|}{\sqrt{1+4+4}} = 5$$

ولدينا من معادلة الكرة $R = 5$ اذن المستوي يمس الكرة.

معادلتا العمود النازل من C على المستوي P هما :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

ومعادلاته الوسيطية :

$$x = t \ , \ y = 2t \ , \ z = 2t$$

نعوض في معادلة المستوي فنجد :

$$t + 4t + t + 15 = 0$$

ومنه : $t = \frac{-5}{3}$

ونقطة التماس هي :

$$\left(\frac{-5}{3} \ , \ \frac{-10}{3} \ , \ \frac{-10}{3}\right)$$

(6.6) - الوضع النسبي لكرة ومستقيم :

اذا كان المستقيم معينا بمعادلاته الوسيطية، نعوض x, y, z من معادلات المستقيم في معادلة الكرة فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للوسيط . نحسب مميز هذه المعادلة ، فان كان $\Delta > 0$ فالمستقيم قاطع للكرة بنقطتين واذا كان $\Delta = 0$ فالمستقيم يمس الكرة

اما اذا كان $\Delta < 0$ فالمستقيم خارج الكرة أما اذا كان المستقيم معينا بمعادلتي مستويين متقاطعين فاننا نحل جملة هاتين المعادلتين مع معادلة الكرة فنجد معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لاحد المتحولات x, y, z وعندئذ يكون المستقيم قاطعا أو مماسا او خارجا عن الكرة حسبما يكون المميز موجبا أو صفرا او سالبا . ويمكن رد هذه الحالة الى سابقتها بتحويل معادلتي المستقيم الى الشكل الوسيطي

مثال(1) :

اثبت أن المستقيم :

$$x = 5+4t \ , \ y = 1-t \ , \ z = 1-t$$

يمس الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

ثم عيّن نقطة التماس .

الحل :

نعوض x, y, z من معادلات المستقيم في معادلة الكرة فنجد :

$$(5+4t)^2 + (1-t)^2 + (1-t)^2 = 9$$
$$18t^2 + 36t + 18 = 0$$
$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

ومنه $t = -1$ هو جذر مضاعف للمعادلة وبالتالي المستقيم يمس الكرة . ونقطة التماس هي : $(1,2,2)$.

مثال(٢):

ادرس وضع المستقيم المعين بالمعادلتين :

$$2x - 4y - z + 6 = 0 \qquad 2x - y + 2z - 12 = 0$$

بالنسبة للكرة :

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 43 = 0$$

الحل :

من معادلتي المستقيم نحسب y, x بدلالة z فنجد :

$$x = 9 - \frac{3}{2} z \quad ; \quad y = 6 - z$$

بالتعويض في معادلة الكرة نجد :

$$z^2 - 8z + 16 = 0$$

لها جذر مضاعف هو $z=4$ والمستقيم يمس الكرة ،نعوض في معادلتي المستقيم نجد $x=3$, $y=2$ وبالتالي فان نقطة التماس هي $(3,2,4)$

(6.7) – المستويات المماسة للكرة :

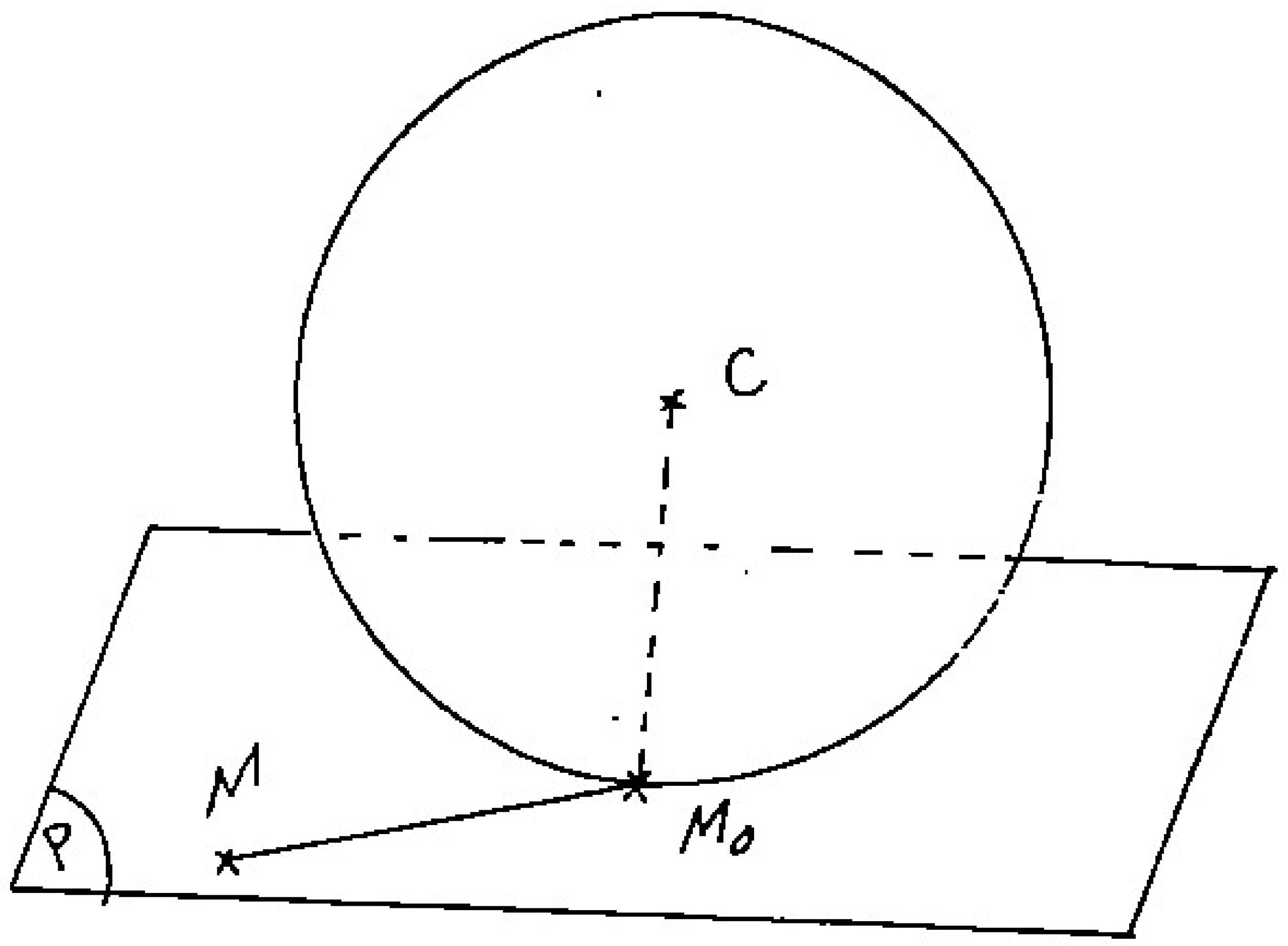
أولا : معادلة المستوي المماس لكرة في نقطة معلومة منها :

لتكن الكرة (S) معينة بالمعادلة :

$$x^2+y^2+z^2+2c_1x+2c_2y+2c_3z+d=0$$

ولتكن $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة معلومة من هذه الكرة ولنوجد

معادلة المستوي المماس P لهذه الكرة عند النقطة M_0 شكل (٥٤).



شكل (٥٤)

لنأخذ النقطة $M(x,y,z)$ متحولة في المستوي المماس .

ففي جميع أوضاع النقطة M يكون :

$$\vec{M_0M}\cdot\vec{CM_0}=0$$

حيث $C(-c_1,-c_2,-c_3)$ مركز الكرة،فاذا كتبنا العبارة التحليلية لهذه المعادلة نجد :

$$(x-x_0).(x_0+c_1)+(y-y_0)(y_0-c_2)+(z-z_0).(z_0+c_3)=0$$

$$x_0x+y_0y+z_0z+c_1x+c_2y+c_3z-x_0^2-y_0^2-c_1x_0-c_2y_0-c_3z_0=0 \quad (6.7.1)$$

وبما أن نقطة التماس $M_0(x_0,y_0,z_0)$ تنتمي الى الكرة (S) فان :

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2+2c_1x_0+2c_2y_0+2c_3z_0+d=0 \qquad (6.7.2)$$

بجمع (6.7.1) مع (6.7.2) نجد :

$$x_0x+y_0y+z_0z+c_1(x+x_0)+c_2(y+y_0)+c_3(z+z_0)+d=0 \qquad (6.7.3)$$

ونرى بسهولة انه للحصول على معادلة المستوي المماس للكرة عند النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نستبدل في معادلة الكرة كل x^2 بـ x_0x وكل y^2 بـ y_0y وكل z^2 بـ z_0z وكل x بـ $\frac{x+x_0}{2}$ وكل y بـ $\frac{y+y_0}{2}$، وكل z بـ $\frac{z+z_0}{2}$ فنحصل على معادلة المستوي المماس .

مثال :

اكتب معادلة المستوي المماس للكرة :

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+3=0$$

في النقطة $M_0(1,2,0)$

الحل :

ان النقطة M_0 تحقق احداثياتها معادلة الكرة، فمعادلة المستوي المماس عندها هي :

$$x+2y-2(x+1)-(y+2)-z+3=0$$

$$x-y+z+1=0$$

ثانيا : معادلة المستوي المماس لكرة والمار من مستقيم معلوم :

ليكن D مستقيما في الفراغ معينا بالمعادلتين :

$$P_1\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0 \quad ; \quad P_2\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$$

ولتكن (S) كرة معادلتها :

$$S\equiv x^2+y^2+z^2+2c_1x+2c_2y+2c_3z+d=0$$

ان الشرط اللازم والكافي ليكون المستوي P مارا من D ومماسا للكرة (S) هو :

١- أن يكون المستوي P احد مستويات حزمة المستقيم D ومعادلته من الشكل :

$$(p_1+p_2\lambda)x+(q_1+q_2\lambda)y+(r_1+r_2\lambda)z+h_1+h_2\lambda=0$$

٢- ان يكون بعد مركز الكرة $C(-c_1,-c_2,-c_3)$ عن المستوي مساويا لنصف قطر الكرة (S) أي :

$$\frac{[-c_1(p_1+p_2\lambda)-c_2(q_1+q_2\lambda)-c_3(r_1+r_2\lambda)+h_1+h_2\lambda]^2}{(p_1+p_2\lambda)^2+(q_1+q_2\lambda)^2+(r_1+r_2\lambda)^2}=c_1^2+c_2^2+c_3^2-d \qquad (6.7.4)$$

بفك الاقواس نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في الوسيط λ فاذا كان المميز موجبا كان للمعادلة جذران حقيقيان λ_1 و λ_2 وبالتالي هناك مستويان يمسان الكرة ويمران بالمستقيم D وان كان المميز صفرا كان للمعادلة جذر مضاعف اي هناك مستو واحد يمس

الكرة ،أما اذا كان المميز سالبا فلا جذور للمعادلة وبالتالي لا يوجد مستو يمر من D ويمس الكرة. ففي الحالة الاولى يكون D خارج الكرة وفي الحالة الثانية يكون D مماسا للكرة وفي الحالة الثالثة يكون المستقيم D قاطعا للكرة في نقطتين مختلفتين .

مثال :

اوجد معادلة مستو يمر بالمستقيم :

$$\frac{x}{2} = \frac{y+2}{2} = z-2$$

ويمس الكرة :

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3=0$$

الحل :

نكتب معادلتي المستقيم في صورة تقاطع مستويين :

$$x-y-2=0 \; ; \; x-2z+4=0$$

معادلة أي مستو يمر بالمستقيم هي :

$$(1+\lambda)x-y-2\lambda z-2+4\lambda=0 \qquad (1)$$

مركز الكرة هو $C(1,-1,-2)$ ونصف قطرها $R=3$ والمستوي (1) يمس هذه الكرة عندما :

$$\frac{[(1+\lambda)+1+4\lambda-2+4\lambda]^2}{(1+\lambda)^2+1+4\lambda^2}=9$$

بالاصلاح نجد :

$$2\lambda^2-\lambda-1=0$$

لها جذران :

$$\lambda=-\frac{1}{2} \quad , \quad \lambda=1$$

اذن هناك مستويان يحققان المطلوب هما :

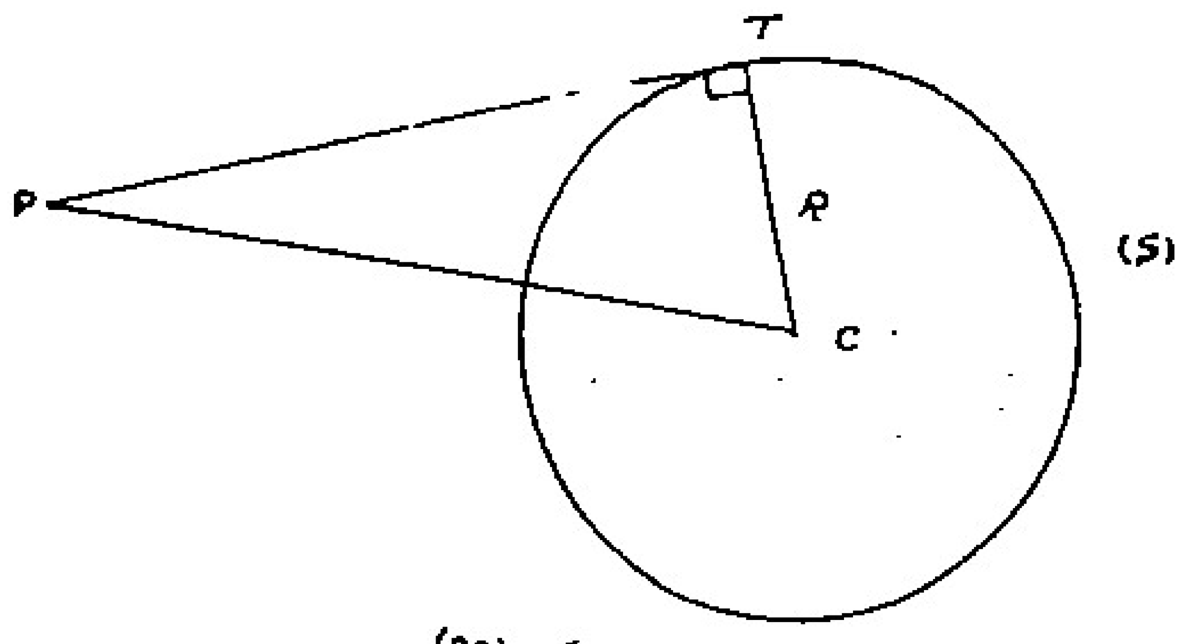
$$2x-y-2z+2=0 \; ; \; -2y+2z-8=0$$

(6.8) ـ طول المماس المرسوم من نقطة معلومة لكرة :

لتكن الكرة (S) المعينة بالمعادلة :

$$S^*(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2c_1x+2c_2y+2c_3z+d=0 \qquad (6.8.1)$$

ولتكن $P(x_0,y_0,z_0)$ نقطة خارجة عن الكرة S، ولتكن T نقطة تماس المستقيم المماس المرسوم من P للكرة (S) ولنحسب طول المماس PT . ان مركز الكرة هو النقطة $C(-c_1,-c_2,-c_3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2-d}$:



شكل (٥٥)

ان المثلث PTC قائم الزاوية عند T عندئذ يكون :

$$\overline{PT}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{CT}^2$$

$$= (x_0 + c_1)^2 + (y_0 + c_2)^2 + (z_0 + c_3)^2 - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - d)$$

$$\overline{PT}^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2c_1x_0 + 2c_2y_0 + 2c_3z_0 + d \qquad (6.8.2)$$

$$= S^*(x_0, y_0, z_0)$$

أي للحصول على طول المماس المرسوم من نقطة معلومة خارج كرة نعوض احداثيات هذه النقطة في معادلة الكرة (6.8.1 فالقيمة العددية $S^*(x_0, y_0, z_0)$ هي مربع طول هذا المماس المرسوم من هذه النقطة للكرة.

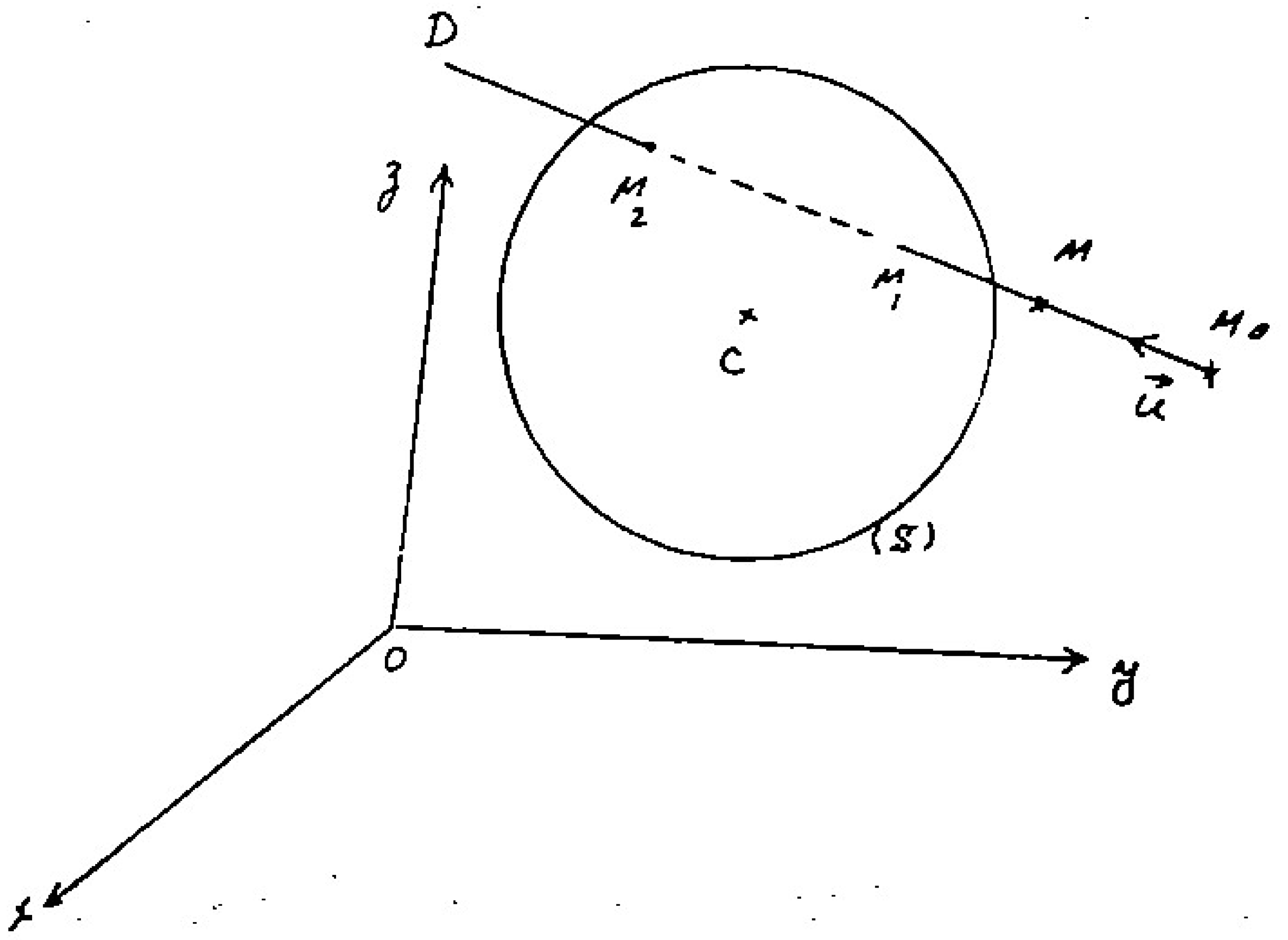
(6.9) ـ قوة نقطة بالنسبة لكرة :

بفرض (S) كرة معادلتها :

$$S^*(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2c_1x + 2c_2y + 2c_3z + d = 0 \qquad (6.9.1)$$

ولتكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة ،لتنشئ من M_0 مستقيما يقطع الكرة في النقطتين M_1, M_2 ولنفرض أن (α, β, γ) هي جيوب تمام توجيه هذا المستقيم ،فاذا كانت $M(x, y, z)$ نقطة متحولة من المستقيم D فان معادلاته الوسيطية :

$$x = x_0 + \alpha t \ , \quad y = y_0 + \beta t \ , \quad z = z_0 + \gamma t$$



شكل (٥٦)

ففي جميع أوضاع M على المحور M_0D الموجه باتجاه $\vec{u}$ يكون:

$$\overrightarrow{M_0M} = t.\vec{u}$$

$$\overline{M_0M} = t$$

فالوسيط t يمثل القياس الجبري للقطعة المستقيمة $\overline{M_0M}$:

لايجاد قيمتي t الموافقتين لنقطتي تقاطع المحور M_0D مع الكرة، نعوض احداثيات M من المعادلات التوسيطية في معادلة الكرة فنجد:

$$t^2 + 2(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3)\, t + S^*(x_0,y_0,z_0) = 0$$

هذه المعادلة هي من الدرجة الثانية في الوسيط t، جذراهما t_1 , t_2 يوافقان نقطتي التقاطع M_1, M_2 أي $\overline{M_0M_1} = t_1$ ، $\overline{M_0M_2} = t_2$ ، جداء جذري هذه المعادلة هو :

$$t_1 \cdot t_2 = \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} = S^*(x_0,y_0,z_0)$$

من هذه العلاقة بين الجذرين نلاحظ ان الجداء الجبري للقطعتين $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$ لا يتعلق بـ (α,β,γ) أي أن هذا الجداء لا يتعلق بمنحى المستقيم المرسوم من M_0 . وهذا الجداء يساوي للمقدار الثابت $S^*(x_0,y_0,z_0)$ المتعلق بوضع النقطة M_0 فقط . فهذا الجداء الثابت يسمى بالتعريف قوة النقطة M_0 بالنسبة للكرة (S) .

فقوة النقطة M_0 بالنسبة للكرة (S) هي القيمة العددية

للطرف الايسر من معادلة الكرة عندما تكون أمثال الحدود المربعة في هذه المعادلة تساوي الواحد .

ونلاحظ ان قوة النقطة M_0 الخارجة عن الكرة هي كمية موجبة لان M_2, M_1 في جهة واحدة بالنسبة الى النقطة M_0 وفي هذه الحالة يوجد لقوة النقطة مفهوم هندسي وتساوي مربع طول المماس المنشأ من النقطة M_0 للكرة حسب الفقرة (6.8) . اما اذا وقعت النقطة M_0 داخل الكرة فان M_2, M_1 تكونان فيجهتين مختلفتين بالنسبة لها وبالتالي الجداء $\overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} < 0$ أي قوة النقطة تكون سالبة في هذه الحالة. واذا وقعت على سطح الكرة تصبح القوة صفرا لان احداثيات M_0 تحقق معادلة الكرة.

من هذه الدراسة لقوة نقطة بالنسبة الى كرة يمكننا أن نعلم وضع نقطة ما بالنسبة الى كرة.

واذا كانت معادلة الكرة بالشكل النموذجي :

$$S^*(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$$

فان قوة النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ بالنسبة لهذه الكرة هي :

$$S^*(x_0,y_0,z_0) = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2 - R^2 = d^2 - R^2$$

حيث d بعد النقطة M_0 عن المركز C , R نصف قطر الكرة.

وواضح من العلاقة $S^*(x_0,y_0,z_0)=d^2-R^2$ أن هذه القوة تكون موجبة عندما تقع M_0 خارج الكرة اي لما $d>R$.

وتكون سالبة عندما تقع M_0 داخل الكرة أي لما $d<R$ ، وتكون مساوية للصفر عندما M_0 تقع على سطح الكرة اي لما $d=R$ ، وبحالةخاصة عندما تقع M_0 في مركز الكرة يكون $d=0$ وبالتالي فان قوتها تصبح :

$$S^*(a,b,c) = -R^2$$

مثال :

احسب قوة النقطة $M_0(1,2,1)$ بالنسبة للكرة :

$$S^*(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+4=0$$

ثم عيّن وقع النقطة بالنسبة لهذه الكرة.

الحل :

$$S^*(1,2,1)=16$$

بما أن القوة موجبة فالنقطة M_0 تقع خارج الكرة وطول المماس المرسوم منها لهذه الكرة هو $M_0T=4$ حيث T نقطة التماس .

(6.10) ـ المستوي الاساسي لكرتين معلومتين :

هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ المتساوية القوى بالنسبة لكرتين معلومتين .

لايجاد معادلة هذا المستوي ،نفرض أن النقطة $P(x,y,z)$ متساوية القوى بالنسبة للكرتين :

$$S^*_1 \equiv x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=0 \quad (6.10.1)$$

$$S^*_2 \equiv x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2=0 \quad (6.10.2)$$

عندئذ يكون :

$$S^*_1(x,y,z)=S^*_2(x,y,z)$$

أو :

$$S^*_1(x,y,z)-S^*_2(x,y,z)=0$$

بالتعويض من (6.10.1),(6.10.2) نجد :

$$(a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+(c_2-c_1)z+d_1-d_2=0 \quad (6.10.3)$$

هذه المعادلة هي معادلة المستوي الاساسي ،ونلاحظ أن امثال توجيه منحى ناظم هذا المستوي هي أمثال توجيه منحى خط المركزين C_1 C_2 وبالتالي فان المستوي الاساسي لكرتين معلومين هو مستو يعامد خط المركزين .

ونلاحظ ان المستوي الاساسي لكرتين يتعين حتى ولو كانت احدى الكرتين عقدية أو كليهما ،ولا يتعين هذا المستوي عندما يكون للكرتين نفس المركز .

مثال :

أوجد معادلة المستوي الاساسي للكرتين :

$$S^*_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y + 4z - 2 = 0$$

$$S^*_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 4x - y + 3z - 4 = 0$$

بطرح المعادلتين طرفا من طرف نجد :

$$S^*_1 - S^*_2 \equiv -2x - y + z + 2 = 0$$

هي معادلة المستوي الاساسي ٠

(6.11) ـ المحور الاساسي لثلاث كرات :

بفرض S_1, S_2, S_3 ثلاث كرات ،لا تقع مراكزها على استقامة واحـدة. ولنفرض أن P_{12} هو المستوي الاساسي للكرتين S_1, S_2 و P_{23} المستـوي الاساسي للكرتين S_2, S_3 فالمستويان P_{12}, P_{23} متقاطعان حتمـا بفصل مشترك كل نقطة منه متساوية القوى بالنسبة للكرات الثلاثـة، هذا الفصل المشترك يدعى بالمحور الاساسي للكرات الثلاثة وهو المحل الهندسي للنقاط المتساوية القوى بالنسبة للكرات الثلاثة وهو مستقيم يعامد المستوي المعين بمراكز الكرات الثلاثة ٠

(6.12) ـ المركز الاساسي لاربع كرات :

بفرض S_1, S_2, S_3, S_4 اربع كرات لا تقع مراكزها في مستو واحد فان المستويات الاساسية لهذه الكرات الاربعة ،مأخوذة مثنـى مثنى ،تتقاطع بنقطة واحدة A تكون متساوية القوى بالنسبة لهـذه الكرات الاربعة ،فهذه النقطة تسمى بالمركز الاساسي للكرات الاربعة٠

(6.13) ـ تقاطع وتماس كرتين :

اذا كان الكرتان S_1, S_2 متقاطعتين فان كل نقطة من دائـرة التقاطع تحقق جملة معادلتيهما :

$$S^*_1(x,y,z) = 0 \quad , \quad S^*_2(x,y,z) = 0 \qquad (6.13.1)$$

وتحقق بنفس الوقت الجملة المكافئة للجملة (6.13.2) وهي :

$$\left.\begin{aligned} & S^*_1(x,y,z) = 0 \\ & S^*_1(x,y,z) - S^*_2(x,y,z) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.13.2)$$

ولما كانت المعادلة الثانية $S^*_1 - S^*_2 = 0$ تمثل معادلـة المستوي الاساسي للكرتين المفروضتين فان النقاط المشتركة بيـن الكرتين هي النقاط المشتركة بين احدى الكرتين والمستوي الاساسي لهما ،لذلك يمكن ان نقول : ان المستوي الاساسي لكرتين متقاطعتيـن هو مستوي دائرة التقاطع ،ومن جهة أخرى ان كل نقطة من دائرة التقاطع معدومة القوة بالنسبة للكرتين وهذه النقاط تنتمي الى المستـوي الاساسي وهو مستوي دائرة التقاطع ٠

أما المستوي الاساسي لكرتين متماستين فهو المستوي المماس المشترك لهاتين الكرتين في نقطة التماس ٠ أما اذا لم تشتـرك الكرتان بأي نقطة فمستويهما الاساسي لا يقطع اية كرة منهما٠ لذلك: لتعيين وضع كرتين بالنسبة الى بعضهما يكفي تعيين وضع احداهمـا

بالنسبة للمستوي الاساسي :

$$P \equiv S^*_1 - S^*_2 = 0$$

مثال (١) :

عيّن الوضع النسبي للكرتين :

$$S^*_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$
$$S^*_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 2 = 0$$

الحل :

معادلة المستوي الاساسي هي :

$$2x - y - 1 = 0$$

بعد مركز الاولى $(0,0,0)$ عن هذا المستوي هو :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ونصف قطر الكرة الاولى هو $R = 1$ وبما أن $R > \delta$ اذن المستوي الاساسي يقطع هذه الكرة وبالتالي الكرتان متقاطعتان .

مثال(٢) :

عيّن الوضع النسبي للكرتين :

$$S^*_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$$
$$S^*_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 6 = 0$$

الحل :

معادلة المستوي الاساسي هي :

$$x + z - 2 = 0$$

بعد مركز الاولى $(0,0,0)$ عن هذا المستوي هو :

$$\delta = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

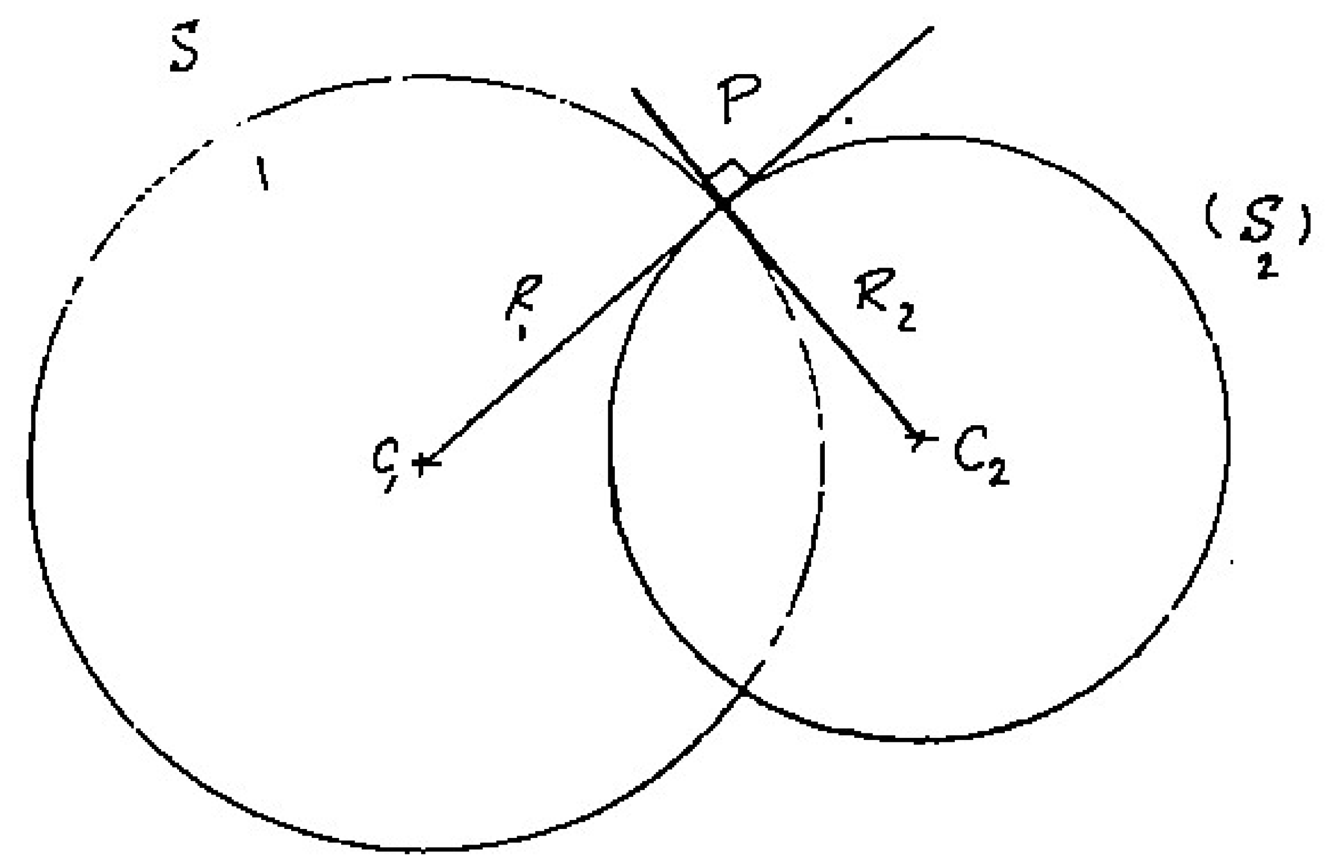
ونصف قطر الكرة الاولى هو $R = \sqrt{2}$ وبما أن $R = \delta$ فالكرتان متماستان .

(6.14)ــ تعامد كرتين :

تتعامد كرتان متقاطعتان اذا تعامد المستويان المماسان لهما في كل نقطة من نقاط التقاطع ، أو اذا تعامد القطران الماران في كل نقطة من نقاط التقاطع . وتكون أقطار احدى الكرتين مماسة للثانية في نقاط التقاطع . وبالتالي تكون قوة مركز الكرة S_1 بالنسبة الى الكرة S_2 مساوية الى مربع نصف قطرها وبالعكس فاذا كانت معادلتا هاتين الكرتين :

$$S^*_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z + d_1 = 0$$
$$S^*_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2z + d_2 = 0$$

فان قوة المركز $C_1(a_1, b_1, c_1)$ بالنسبة للكرة S_2 هي :



شكل (٥٧)

$$S^*_2(a_1, b_1, c_1) = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2a_2a_1 - 2b_2b_1 - 2c_2c_1 + d_2$$
$$= R_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - d_1$$

ومنه نجد :

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = \frac{d_1 + d_2}{2} \qquad (6.14.1)$$

وهو شرط تعامد كرتين .

حيث $C_1(a_1,b_1,c_1)$, $C_2(a_2,b_2,c_2)$ مركزا الكرتين و d_2,d_1 الحدان الثابتان في معادلتيهما .

الحل :

أثبت أن الكرتين :

$$S^*_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4 = 0$$
$$S^*_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

متعامدتان .

الحل :

مركز الاولى $C_1(-1,0,0)$ ومركز الثانية $C_2(1,1,-1)$

$$d_2 = 2 \quad , \quad d_1 = -4$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = -1$$
$$\frac{d_1 + d_2}{2} = -1$$

فشرط التعامد محقق والكرتان متعامدتان .

مثال(٢) :

عيّن الوسيط λ كي تتعامد الكرتان :

$$S^*_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x + 2\lambda y + z - 1 = 0$$
$$S^*_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x + y + 4z - 3 = 0$$

الحل :

$$C_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right) \quad , \quad C_1\left(\lambda, -\lambda, -\frac{1}{2}\right)$$
$$d_2 = -3 \quad , \quad d_1 = -1$$

شرط التعامد :

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} + 1 = -2$$

منه : $\lambda = -3$

(6.15) ـ حزمة الكرات :

لتكن الكرتان S_1 ، S_2 المعينتان بالمعادلتين :

$$S^*_1(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z + d_1 = 0$$

$$S^*_2(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2z + d_2 = 0$$

وجدنا في الفقرة (6. 10) أن المستوي الاساسي لهاتين الكرتين معين بالمعادلة :

$$P = S^*_1 - S^*_2 = 0$$

نعرف حزمة الكرات المعينة بالكرتين S_1, S_2 : مجموعة الكرات التي لها مع احدى هاتين الكرتين نفس المستوي الاساسي P • وينتج من هذا التعريف :

١ـ المستوي الاساسي لاي كرتين من الحزمة هو المستوي P•

٢ـ ان جميع مراكز كرات الحزمة تقع على المستقيم المار بمركزي الكرتين S_1 و S_2 •

٣ـ اذا كانت الكرتان S_1, S_2 متقاطعتين بالدائرة (C) فان جميع كرات الحزمة تتقاطع بهذه الدائرة• وبالعكس فان كل كرة تمر بالدائرة (C) تكون احدى كرات هذه الحزمة• اذن في هذه الحالة تتعين حزمة الكرات بدائرة التقاطع (C) •

يمكننا أن نرى بسهولة أن معادلة أي كرة من هذه الحزمة تكون من الشكل :

$$S(\lambda) \equiv S_1 + \lambda S_2 = 0 \qquad (6.15.1)$$

حيث λ وسيط حقيقي $(\lambda \neq -1)$ •

فعندما $\lambda = 0$ نحصل على معادلة الكرة S_1 ومن أجل $\frac{1}{\lambda} = 0$ نحصل على معادلة S_2 .

ويمكن كتابة معادلة حزمة الكرات على الشكل :

$$S(\mu) \equiv S_1 + \mu P = 0 \qquad (6.15.2)$$

حيث P الطرف الاول من معادلة المستوي الاساسي للكرتين S_1, S_2 ونلاحظ من المعادلة (6.15.2) ان كرة ومستويا يعينان حزمة كرات •

مثال (1) :

اكتب معادلة حزمة الكرات المعينة بالمعادلتين :

$$S_1 \equiv 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x - 6y = 0$$

$$S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x - 5z + 2 = 0$$

الحل :

حسب (6.15.1) فان معادلة الحزمة هي :

$$S(\lambda) \equiv (3 + \lambda)x^2 + (3 + y)y^2 + (3 + \lambda)z^2 +$$

$$-(2 + \lambda)x - 6y - 5\lambda z + 2\lambda = 0$$

او تكتب بالشكل المكافىء حسب المعادلة (6.15.2)

لنوجد معادلة المستوي الاساسي للكرتين :

$$P \equiv S^*_1 - S^*_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2}{3}x - 2y - x^2 - y^2 - z^2 - x + 5z - 2 = 0$$

$$P \equiv -\frac{1}{3}x - 2y + 5z - 2 = 0$$

أو :

$$P \equiv x + 6y - 15z + 6 = 0$$

ومنه معادلة الحزمة تكون :

$$S(\mu) \equiv 3x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 2x - 6y + \mu(x + 6y - 15z + 6) = 0$$

مثال(٢) :

لدينا في المستوي xoy الدائرة C مركزها $w_1(0,2,0)$ ونصف قطرها 2 ،ولدينا كرة (S) مركزها ($0,0,2$) w ونصف قطرها $\sqrt{2}$ ،والمطلوب :

١- اوجد معادلة كرة S_1 تمر من C وتعامد الكرة (S) .

٢- اوجد معادلة كرة S_2 تمر من C وتمس (S) .

الحل :

١- نعتبر الدائرة (C) دائرة عظمى في كرة مركزها $w_1(0,2,0)$ ونصف قطرها $R = 2$ فمعادلة هذه الكرة هي :

$$x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$$

ومعادلتا الدائرة باعتبارها تقاطع المستوي $z=0$ مع الكرة السابقة هما :

$$(C)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

معادلة حزمة الكرات المارة من الدائرة (C) هي :

$$S(\mu) \equiv x^2 + y^2 + \quad - 4y + \mu z = 0$$

مركز كرة من هذه الحزمة هو النقطة ($0,2$, $\frac{-\mu}{2}$) ، والحد الثابت $d_1=0$.

معادلة الكرة (S) هي :

$$S^* \equiv x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$$

$$S^* \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 2 = 0$$

مركزها $w(0,0,2)$ والحد الثابت $d = 2$.

شرط التعامد بين كرة من الحزمة والكرة (S) هو :

$$0 + 0 - \mu = \frac{0+2}{2} = 1$$

منه : $\mu = -1$

اذن : $S(-1) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4y - z = 0$

هي معادلة الكرة المطلوبة S_1 .

٢- لايجاد معادلة الكرة (S_2) التي تمر من (C) وتمس الكرة S نكتب شرط تماس المستوي الاساسي للكرتين $S, S(\mu)$ مع الكـــــرة والمستوي الاساسي لهاتين الكرتين هو :

$$P \equiv S(\mu) - S^* = 0$$

$$P \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4y + \mu z - x^2 - y^2 - z^2 + 4z - 2 = 0$$

$$P \equiv -4y + (\mu + 4)z - 2 = 0$$

شرط تماس P مع (S) هو :

$$\frac{P(0,0,2)}{|\vec{N}|} = \sqrt{2}$$

$$\frac{[2(\mu+4) - 2]^2}{16 + (\mu+4)^2} = 2$$

$$(2\mu + 6)^2 = 2(\mu^2 + 8\mu + 16) + 32$$

$$2\mu^2 + 8\mu - 28 = 0$$

$$\mu^2 + 4\mu - 14 = 0$$

للمعادلة جذران هما :

$$\mu' = -2 + 3\sqrt{2}$$

$$\mu'' = -2 - 3\sqrt{2}$$

اذن هناك كرتان تحققان المطلوب معادلتاهما :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y + (-2 \pm 3\sqrt{2})z = 0$$

(6.16) ـ المستوي القطبي لنقطة بالنسبة الى كرة :

لتكن (S) كرة معادلتها :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \qquad (1)$$

ولتكن $Q(x',y',z')$ نقطة خارج الكرة ،فمن هذه النقطة يمكننا أن نرسم عددا لا نهائيا من المستقيمات المماسة للكرة ونقط تماس هذه المستقيمات مع الكرة تشكل محيط دائرة مستويها يسمى المستوي القطبي للنقطة Q بالنسبة الى الكرة ،كما نسمي النقطة Q قطب المستوي بالنسبة للكرة .

ولنوجد الان معادلة المستوي القطبي للنقطة Q بالنسبة للكرة ولنفرض ان احد المستقيمات المرسومة من Q يمس الكـــرة (S) عند النقطة $P(x_1,y_1,z_1)$ فحسب العلاقة (6.7.1) تكون معادلة المستوي المماس للكرة عند النقطة P هي :

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + a(x+x_1) + b(y+y_1) + c(z+z_1) + d = 0 \qquad (2)$$

وبما أن هذا المستوي يمر من Q عندئذ نجد :

$$x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 + a(x'+x_1) + b(y'+y_1) + c(z'+z_1) + d = 0 \qquad (3)$$

والان لنعتبر المستوي الذي معادلته :

$$xx' + yy' + zz' + a(x+x') + b(y+y') + c(z+z') + d = 0 \qquad (4)$$

حيث $(x;y;z)$ نقطة متحولة من هذا المستوي •

اذا عوضنا (x,y,z) بـ (x_1,y_1,z_1) احداثيات النقطة P نحصل على المعادلة (3) المحققة ، اي أن المعادلة (4) معادلة مستوي يمر من P • وبنفس المناقشة يمكن ان نبرهن أن المعادلة (4) تمثل معادلة مستو يمر من جميع نقاط التماس (P) وهي نقاط تماس المستقيمات المرسومة من Q للكرة ولذلك يمكن أن نعتبر ان المعادلة (4) هي معادلة المستوي القطبي للنقطة Q بالنسبة للكرة (S)•

ونلاحظ أن معادلة المستوي القطبي (4) لها نفس شكل معادلة المستوي المماس (2) الا أنه في حالة المستوي القطبي لا يشترط ان تكون النقطة Q واقعة على سطح الكرة ،واذا مر المستوي القطبي (4) بالنقطة $R(x'',y'',z'')$ عندئذ يكون :

$$x'x''+y'y''+z'z''+a(x'+x'')+b(y'+y'')+c(z'+z'')+d=0$$

ونلاحظ ان هذه النتيجة نحصل عليها تماما اذا عتبرنا المستوي القطبي للنقطة R واشترطنا عليه ان يمر بالنقطة Q • ونقطتان مثل Q ، R بحيث أن المستوي القطبي لاحداها بالنسبة لكرة معلومة يمر بالنقطة الاخرى تسميان بالنقطتين المترافقتين بالنسبة الى كرة•

تمارين(٦)

١ـ أ ـ عيّن مركز ونصف قطر الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$$

ب ـ أوجد معادلة كرة تمر بالنقاط $(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$ ويكون نصف قطرها اصغر ما يمكن •

٢ـ عيّن نصف قطر ومركز الدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5 = 0 \quad , \quad 2x - 2y + 7z - 4 = 0$$

٣ـ أ ـ اكتب معادلة كرة مركزها النقطة $C(3,4,1)$ وتمس المحور oz

ب ـ اكتب معادلة كرة مركزها النقطة السابقة وتمس المستوي :

$$6x+6y-7z+42=0$$

٤ـ أ ـ اكتب معادلة الكرة تمر بالنقطة $A(0,3,1)$ وتقطع المستوي وفق دائرة معادلتاها $x^2+y^2=9 \; , \; z=0$

ب ـ اكتب معادلة كرة تمر بالنقطة $B(7,-3,1)$ وتمر بالدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 11 = 0 \quad , \quad 4x + y - z - 9 = 0$$

٥ـ اكتب معادلة كرة تمر بمحيطي الدائرتين :

$$x^2 + z^2 = 25 \quad , \quad y = 2$$
$$x^2 + z^2 = 16 \qquad y = 3$$

٦- اكتب معادلة كرة تمر بالدائرة :

$$x^2+y^2+z^2-4=0 \ , \ z=0$$

وتمس الكرة :

$$x^2+(y-1)^2+z^2-4z=0$$

٧- آ- اوجد معادلة كرة تكون احدى دوائرها العظمى دائرة تقاطع الكرة : $x^2+y^2+z^2=25$ مع المستوي : $2x-2y+z-9=0$

ب- اوجد معادلة كرة تمر بالدائرة السابقة وتعامد الكرة :

$$x^2+y^2+z^2+2x-2z-5=0$$

٨- اوجد نصف قطر ومركز دائرة تقاطع الكرتين :

$$x^2+y^2+z^2-8x-10y-4z-15=0$$
$$x^2+y^2+z^2+2x+10y+6z+5=0$$

ثم اكتب معادلة الكرة التي تكون فيها هذه الدائرة احدى دوائرها العظمى .

٩- اوجد نصف قطر ومركز دائرة تقاطع الكرة : $x^2+y^2+z^2=25$ مع المستوي $x+2y+2z-9=0$ اوجد معادلتي المسقط القائم لهذه الدائرة على المستوي xoy واحسب مساحته .

١٠- اوجد معادلتي كرتين تمر كل منهما بالدائرة :

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y=0 \ , \ x+y+z+4=0$$

ويقطعهما المستوي $x+y=0$ وفق دائرة نصف قطرها 3 .

١١- آ- اثبت أن المستقيم :

$$x+y+z-4=0=y-3z-1$$

يمس الكرة :

$$x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+5=0$$

ثم عيّن احداثيات نقطة التماس P .

ب- اوجد معادلتي كرتين تمسان الكرة السابقة عند النقطة P وتمسان المستوي yoz .

١٢- اوجد معادلة كرة تمس المستوي : $3x+2y-z+2=0$ عند النقطة $(1,-2,1)$ وتقطع على التعامد الكرة :

$$x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$$

١٣- اثبت أن الكرتين :

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-2z-3=0$$
$$x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+1=0$$

تتقاطعان على التعامد ، واذا كان المستوي الاساسي لهما يقطع خط المركزين C_1 C_2 عند النقطة P ، فأثبت أن $\frac{C_1P}{PC_2}=\frac{9}{5}$

١٤- أوجد المحل الهندسي لمركز الكرة المارة بالنقطتين الثابتتين A(a,b,o) , B (a';b',o·) والمتعامدة مع الكرة

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

١٥- اثبت ان الكرتين :

$$x^2+y^2+z^2-6x+2y+4z-11=0$$
$$x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-1=0$$

تتماسان داخلا ثم عيّن نقطة التماس وأكتب معادلة المستوي المماس المشترك لهما عند هذه النقطة.

١٦- اثبت أن الدائرتين :

$$x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z-5=0 \;,\; 5y+6z+1=0$$
$$x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6=0 \;,\; x+2y-7z=0$$

تقعان على كرة واحدة ،ثم أوجد معادلة هذه الكرة.

١٧- اوجد معادلتي كرتين تمر كل منهما بالدائرة :

$$x^2+y^2+z^2-4x-y+3z+12=0 \;,\; 2x+3y-7z-10=0$$

وتمس المستوي : $x-2y+2z-1=0$

١٨- اوجد معادلتي المستويين المماسين للكرة :

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+10=0$$

اللذين يمران بالمستقيم :

$$\frac{x+3}{14}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-5}{4}$$

١٩- اوجد معادلتي مستويين يمران بالمستقيم :

$$y+z+1=0 \;,\; 2x-4y+5z+13=0$$

وكل منهما يقطع الكرة :

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0$$

وفق دائرة نصف قطرها 4 .

٢٠- اوجد معادلتي المحور الاساسي للكرات :

$$x^2+y^2+z^2+2x+y+z-4=0 \;,\; x^2+y^2+z^2+x+2y+z-4=0$$
$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

ثم عيّن نقطة من المحور الاساسي بحيث تكون أطوال المماسات المرسومة منها للكرات الثلاثة تساوي اطوال المماسات المرسومة منها للكرة :

$$x^2+y^2+z^2-x-y+2z-4=0$$

٢١- اكتب معادلة كرة تمس المستقيم : $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-2}{4}$

في النقطة A(1,-4,6) وتمس المستقيم :

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-6}$$

في النقطة B (4,-3,2) .

٢٢- بفرض Γ دائرة تمر بالنقاط A(a,0,0), B (0,a,0), C(0,0,a) اكتب معادلة كرة تمر برؤوس رباعي الوجوه OABC ثم أوجد المحل الهندسي للدائرة Γ عندما يتحول a .

٢٣- اوجد معادلة كرة مركزها (-6,1,3) ونصف قطرها r وأوجد مساحة الدائرة الناتجة من تقاطع المستوي $x - y + 2z + 5 = 0$ مع الكرة المطلوبة ،ثم أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلتي المستقيم الناظم للكرة عند النقطة (-2,1,3) .

٢٤- اوجد معادلتي مستويين يوازيان المستوي $3x-2y+z = 0$ ويمسان الكرة : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-8 = 0$ ثم عيّن احداثيات نقطتي التماس .

* * *

الفصل السابع

السطوح التي يولدها منحن تابع لوسيط

- تمهيد :

ليكن المنحني C(λ) تابعاً للوسيط λ معادلتاه :

$$C(\lambda)\left|\begin{array}{l} f(x,y,z,\lambda)=0 \\ g(x,y,z,\lambda)=0 \end{array}\right\} \qquad (7.1.1)$$

فعندما يأخذ الوسيط القيم $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ نحصل على مجموعة من المنحنيات $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ، فاذا كانت النقطة M نقطة من المنحني C(λ) معينة بفاصلتها المنحنية $\widehat{M_0M}=s$ حيث M_0 مبدأ الفصول المنحنية فواضح أن النقطة M تتعين في الفراغ بواسطة وسيطين الاول λ الذي يعين المنحني الذي تنتمي اليه والثاني الوسيط s الذي يعين وضعها على هذا المنحني ،وبما أن وضع النقطة M في الفراغ قد تعين تماما بوسيطين s , λ ،فانها تقع على سطح (S) معادلاته الوسيطية :

$$x=x(\lambda,s), y=y(\lambda,s), z=z(\lambda,s) \qquad (7.1.2)$$

وللحصول على معادلة هذا السطح بالشكل الديكارتي نحـذف الوسيطين s , λ من المعادلات (7.1.2) أو نحذف الوسيط λ مـن المعادلتين(7.1.1) فنحصل على المعادلة $F(x.y.z) = 0$ هـي معادلة السطح المطلوب .

مثال(١):

لتكن $D(\lambda)$ مجموعة من المستقيمات معينة بالمعادلتين :

$$x - \lambda y - 1 = 0$$
$$2\lambda x - \lambda^2 y - z = 0$$

فعندما تأخذ λ قيما مختلفة نحصل على مجموعة من المستقيمات تمسح سطحا (S) نحصل على معادلته بحذف λ بين المعادلتين السابقتين ،فاذا حسبنا λ من المعادلة الاولى وعوضناها في الثانية نجد :

$$x^2 - yz - 1 = 0$$

وهي معادلة مجسم قطع زائد ذي فرع واحد .

مثال (٢) :

بفرض M نقطة في الفراغ معينة بالمعادلات الوسيطية :

$$x = \lambda \cos t \ , \ y = \lambda \sin t \ , \ z = \lambda$$

فمن اجل قيمة معينة للوسيط $\lambda = \lambda_1$ فان النقطة M تنتمي الى محيط دائرة مركزها النقطة $(0,0,\lambda_1)$ ونصف قطرها $r=\lambda_1$ وتقع في مستو راقمه λ_1 وعندما نعطي الوسيط λ القيم $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 , \ldots\ldots, \lambda_n$ نحصل على مجموعة من الدوائر مراكزها تقع على المحور oz وانصاف

اقطارها القيم المختلفة للوسيط ،هذه الدوائر تمسح سطحا (S) نحصل على معادلته بحذف الوسيطين t , λ بين المعادلات السابقة فنجد :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

وهي معادلة مخروط دوراني رأسه o ومحوره oz .

ولنعتبر الان المنحني $C(\lambda,\mu)$ المعين بالمعادلتين :

$$f(x.y.z) = \lambda \ , \ g(x.y.z) = \mu \qquad (7.1.3)$$

في الحقيقة أن المنحني $C(\lambda,\mu)$ يمر بأية نقطة من الفراغ، فلو اعتبرنا النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ من الفراغ ،وعوضنا احداثياتها في المعادلتين السابقتين نحصل على قيمتي الوسيطين λ_0, μ_0 اللذين يعينان المنحني $C_0(\lambda_0,\mu_0)$ الذي يمر بالنقطة M_0 كذلك مـن أجل النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نحصل على المنحني $C_1(\lambda_1,\mu_1)$ وهكذا نستطيع أن نحصل على مجموعة من المنحنيات تمسح الفراغ بأكمله عندما يتغير الوسيطان λ , μ فاذا ربطنا بين الوسيطين λ,μ بعلاقة مـن الشكل :

$$F(\lambda, \mu) = 0$$

فان المنحني يصبح تابعا الى وسيط واحد وبالتالي فان هـذا المنحني يولد سطحا (S) نحصل على معادلته بتعويض λ,μ مـن المعادلتين(7.3.1) فنجد :

$$F\left[f(x,y,z) \ , \ g(x.y.z)\right] = 0 \qquad (7.1.4)$$

(7-2) – السطوح التي يولدها منحن وسيطي ضمن شروط هندسية معينة :

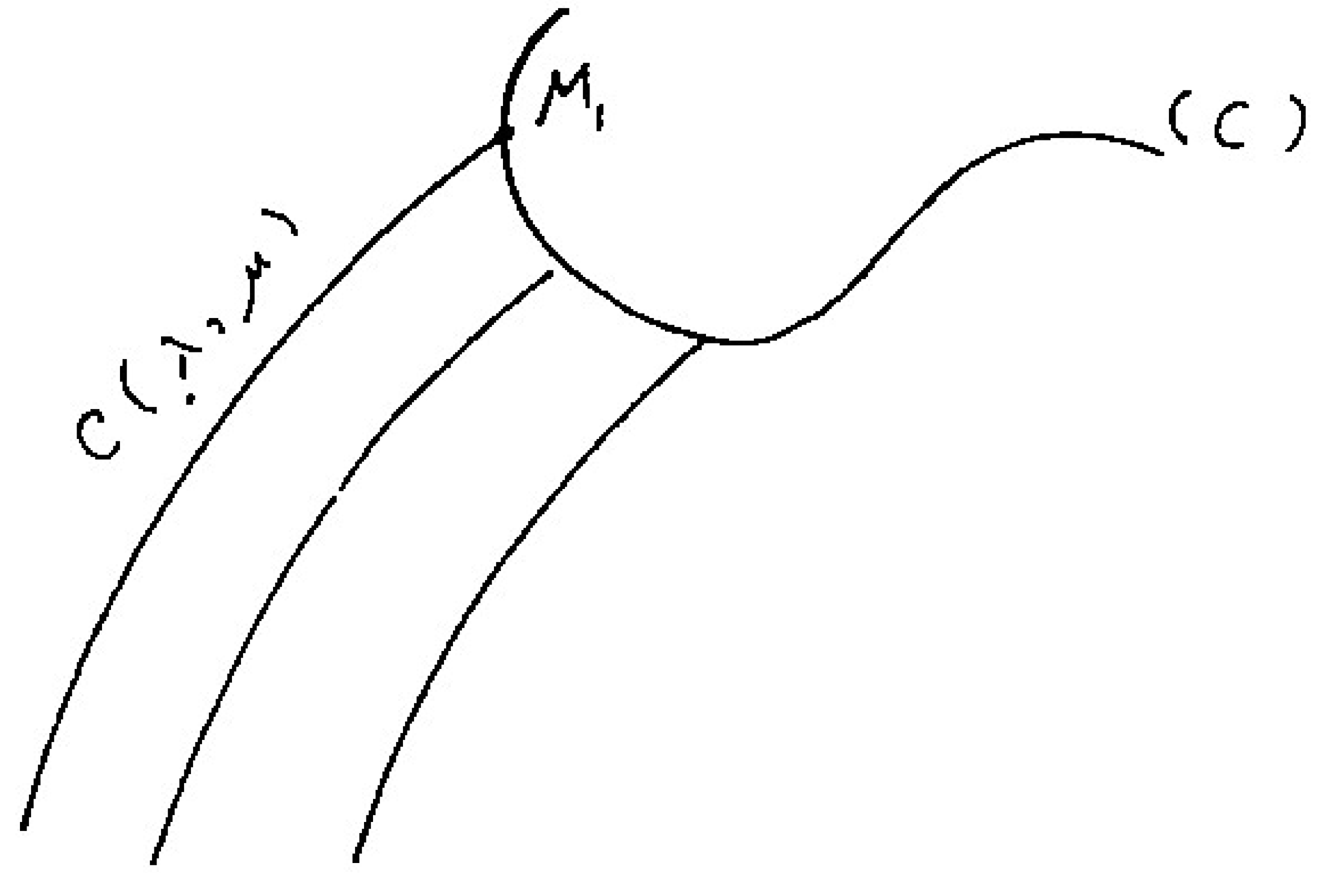
أولا : معادلة سطح يولده منحن وسيطي مستندا على منحن معلوم :

ليكن المنحني $C(\lambda,\mu)$ المعين بالمعادلتين :

$$f(x,y,z)=\lambda \quad , \quad g(x,y,z)=\mu \qquad (7.2.1)$$

ولنوجد معادلة السطح (S) الذي يولده هذا المنحني عندما يستند على المنحني C المعين بالمعادلتين :

$$P(x,y,z) = 0 \quad , \quad Q(x,y,z) = 0 \qquad (7.2.2)$$



شكل (٥٨)

اذا فرضنا $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة استناد المنحني $C(\lambda,\mu)$ على المنحني C فان احداثيات هذه النقطة تحقق المعادلات الاربعة :

$$f(x_1, y_1, z_1)=\lambda \quad , \quad g(x_1, y_1, z_1)=\mu$$

$$p(x_1, y_1, z_1)=0 \quad , \quad g(x_1, y_1, z_1)=0$$

فاذا حذفنا x_1, y_1, z_1 بين هذه المعادلات الاربعة نحصل على العلاقة :

$$F(\lambda,\mu)=0$$

فاذا عوضنا λ, μ بقيمتهما من المعادلتين (7.2.1) نحصل على المعادلة :

$$F\left[f(x,y,z) \quad , \quad g(x,y,z)\right] = 0 \qquad (7.2.3)$$

هي معادلة السطح المطلوب حيث : x,y,z هي احداثيات نقطة من المنحني $C(\lambda,\mu)$ التي هي بنفس الوقت احداثيات نقطة متحولة من السطح (S) . تسمي المنحني $C(\lambda,\mu)$ بالمنحني المولد للسطح والمنحني (C) بالدليل .

مثـــال :

اوجد معادلة السطح الذي يولده المنحني $C(\lambda,\mu)$ المعين بالمعادلتين :

$$x^2 + z^2 = \lambda \qquad (1)$$

$$y \cdot z = \mu \qquad (2)$$

والذي دليله المستقيم المعين بالمعادلتين :

$$x + y + z - 2 = 0 \qquad (3)$$

$$y = 2 \qquad (4)$$

الحـل :

لتكن $M\ (x,y,z)$ نقطة الاستناد فهذه النقطة تحقق احداثياتها المعادلات الاربعة السابقة :

من (4) , (2) نجد $z = \frac{\mu}{2}$ بالتعويض في (3) نجد:

$$x + \frac{\mu}{2} = 0 \quad \text{منه} \quad x = -\frac{\mu}{2}$$

نعوض x , z بما يساوهما في المعادلة(1) نجد :

$$\frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^2}{4} = \lambda$$

أي : $\mu^2 = 2\lambda$

$$F(\lambda, \mu) \equiv \mu^2 - 2\lambda = 0 \qquad (5)$$

نعوض الان μ, λ بقيمتهما من المعادلتين(1)و(2) فنجد:

$$y^2 z^2 - 2x^2 - 2z^2 = 0$$

هي معادلة السطح المطلوب .

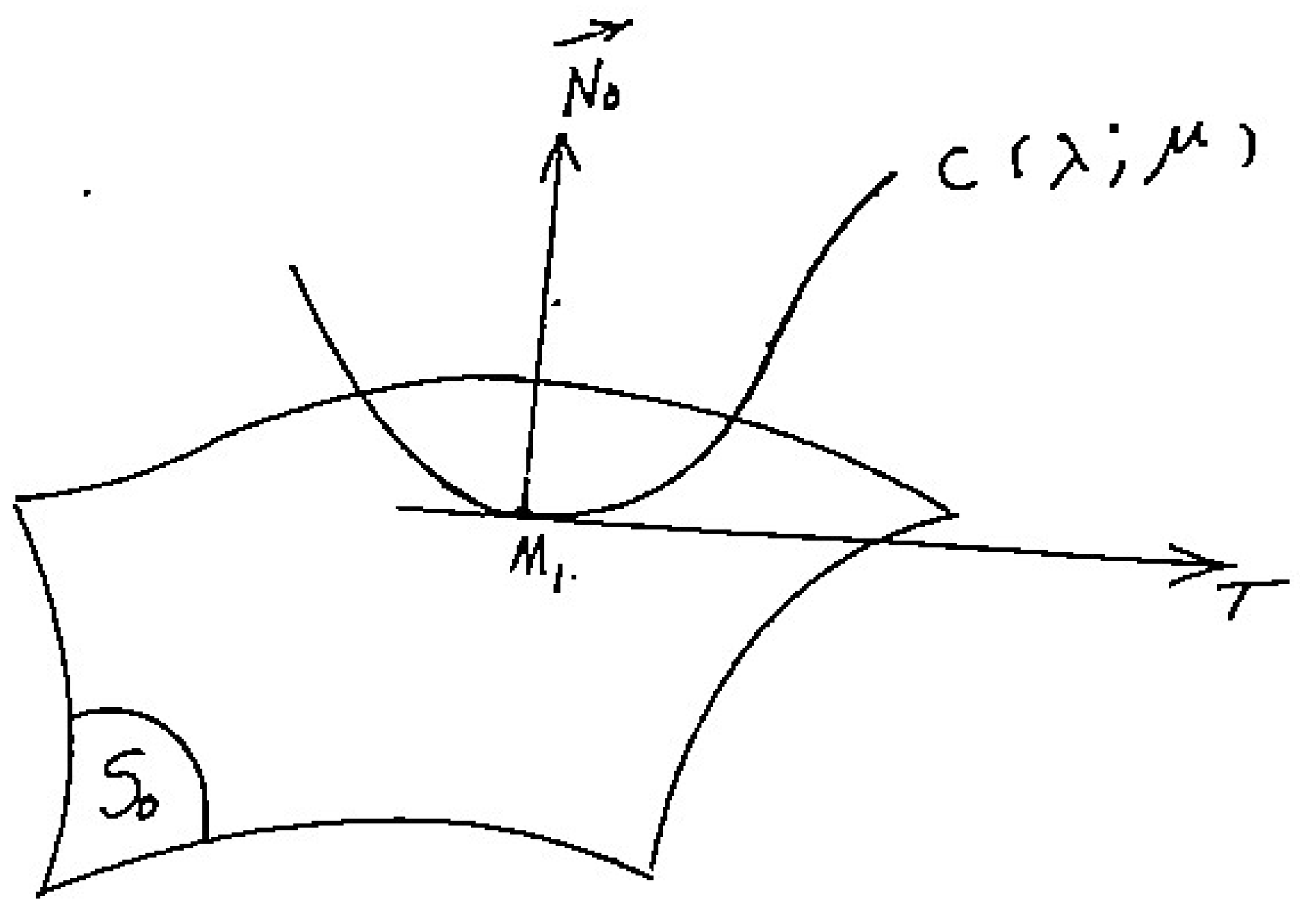
ثانيا : معادلة سطح يولده منحن وسيطي ويمس سطحا معلوما :

ليكن المنحني $C(\lambda, \mu)$ المعين بالمعادلتين :

$$f(x, y, z) = \lambda \;,\; g(x, y, z) = \mu \qquad (7.2.4)$$

ولنوجد معادلة السطح الذي يولده المنحني $C(\lambda, \mu)$ شريطة ان يمس السطح الثابت (S_0) الذي معادلته :

$$H(x, y, z) = 0 \qquad (7.2.5)$$



شكل (٥٩)

اذا فرضنا $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة تماس المنحني $C(\lambda, \mu)$ مع السطح S_0 ففي هذه النقطة يكون ناظم السطح $\vec{N_0}$ معامدا للمنحني $C(\lambda, \mu)$ وبالتالي يكون معامدا لمنحى القماس $\vec{T}$ للمنحني $C(\lambda, \mu)$ عند هذه النقطة أي :

$$\vec{N_0} \cdot \vec{T} = 0$$

لكن :

$$\vec{T} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$$

حيث $\vec{N_1}$, $\vec{N_2}$ شعاعا الناظم لكل من السطحين $f = \lambda$, $g = \mu$ عند النقطة M_1 ،فشرط التماس هو :

$$\vec{N_0} \cdot (\vec{N_1} \wedge \vec{N_2}) = 0 \qquad (7.2.6)$$

حيث :

$$\vec{N_1}(f'_{x_1}, f'_{y_1}, f'_{z_1}) \text{ ، } \vec{N_2}(g'_{x_1}, g'_{y_1}, g_{z_1}) \text{ ، } \vec{N_o}(H'_{x_1}, H'_{y_1}, H'_{z_1})$$

وشرط التماس (7.2.6) نعبر عنه تحليليا بالمعادلة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'_{x_1} & f'_{y_1} & f'_{z_1} \\ g'_{x_1} & g'_{y_1} & g'_{z_1} \\ H'_{x_1} & H'_{y_1} & H'_{z_1} \end{vmatrix} = 0$$

اذن نقطة التماس $M_1(x_1,y_1,z_1)$ تحقق المعادلات الاربعة :

$$f = \lambda \quad , \quad g = \mu \quad , \quad H = 0 \quad , \quad \Delta = 0$$

بحذف (x_1, y_1, z_1) بين هذه المعادلات الاربعة نحصل على علاقة من الشكل :

$$F(\lambda, \mu) = 0$$

فاذا عوضنا μ, λ بقيمتيهما من المعادلتين (7.2.4) نجد :

$$F(f, g) = 0$$

هي معادلة السطح المطلوب .

مثال :

اوجد معادلة السطح الذي يولده المنحني $C(\lambda, \mu)$ المعين بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 = \lambda \qquad (1)$$

$$\lambda . z = \mu \qquad (2)$$

والذي يمس السطح S_o المعين بالمعادلة :

$$x^2.z - y^2 - 1 = 0 \qquad (3)$$

الحل :

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة التماس عندئذ :

$$\vec{N_1}(x, y, o) \text{ ، } \vec{N_2}(z, o, x) \text{ ، } \vec{N_o}(2xz, -2y, x^2)$$

شرط التماس هو :

$$\vec{N_o}\,(\vec{N_1} \wedge \vec{N_2}) = 0$$

هذا الشرط نعبر عنه بالمعينة :

$$\Delta \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ z & 0 & x \\ 2xz & -2y & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

بفك المعينة نجد :

$$x^2 y(z+2) = 0$$

اما $x = 0$ او $y = 0$ او $z = -2$.

من اجل $x = 0$ أو $z = -2$ لا تقابل نقاطا حقيقية مـــن السطح (S_0) ونقبل فقط $y = 0$ هي المعادلة الرابعة التي توافق نقطة التماس • فالمنحني ($C(\lambda, \mu)$ يمس السطح S_0 في نقاط تقـــع في المستوي xoz فقط •

بحذف (x,y, z) من المعادلات الاربعة :

$$x^2 + y^2 = \lambda \quad , \quad x \cdot z = \mu$$

$$x^2 z - y^2 - 1 = 0 \quad , \quad y = 0$$

نجد :

$$F(\lambda , \mu) \equiv \lambda \mu^2 - 1 = 0 \qquad (5)$$

نعوض λ , μ من المعادلتين الاولى والثانية فنجد :

$$F(f, g) \equiv x^2 z^2 (x^2 + y^2) - 1 = 0$$

(7-3) ـ السطوح الاسطوانية :

تعريف : السطح الاسطواني هو السطح الذي يولده مستقيم يتحرك فـــي الفراغ محافظا على منحاه مستندا على منحن معلوم يدعى دليل السطـــح الاسطواني أو ممـاسا لسطح معلوم •

(7-4) ـ معادلة السطح الاسطواني :

ليكن المنحى الثابت للمولدات معينا بالمستقيم D الـــــذي معادلتاه :

$$\begin{cases} P \equiv px + qy + rz + h = 0 \\ Q \equiv p'x + q'y + r'z + h' = 0 \end{cases} \qquad (7.4.1)$$

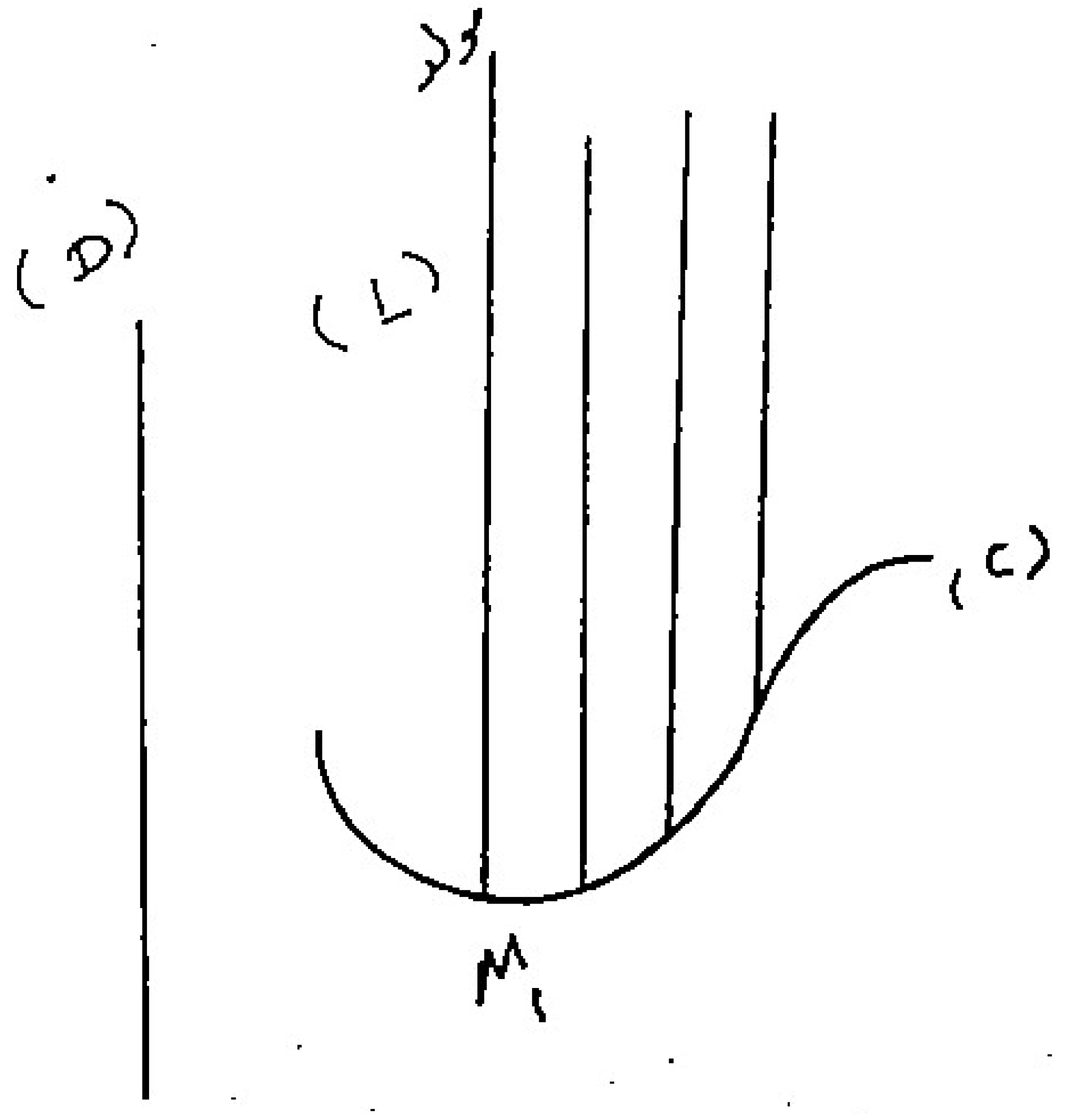
ولنيكن المنحني (C) دليل السطح الاسطواني معينابالمعادلتين:

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad g(x, y, z) = 0 \qquad (7.4.2)$$

فاذا كان (L) احد مولدات هذا السطح الاسطواني تكون معادلتاه :

$$(L) \quad \begin{cases} P = \lambda \\ Q = \mu \end{cases} \qquad (7.4.3)$$

فاذا كانت $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة استناد المولد(L) علـــى الدليل (C) فان احداثياتها تحقق المعادلات الاربعة (7.4.2) ، (7.4.3) ،وبحذف x_1 , y_1 , z_1 بين المعادلات الاربعة نجد العلاقة :



شكل (٦٠)

$$F(\lambda , \mu) = 0$$

واذا عوضنا μ, λ بقيمتيهما من (7.4.3) نجد :

$$F(P, Q) = 0 \qquad (7.4.4)$$

هي معادلة السطح الاسطواني المطلوب ،حيث Q ,P الطرفــان الايسران لمعادلتي مستويين متقاطعين فصلهما المشترك يعين منحــى المولدات •

وبالعكس يمكن أن نبرهن أن كل معادلة من الشكــل (7.4.4) تمثل سطحا اسطوانيا فاذا كانت $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من هـــذا السطح فان جميع نقاط المستقيم :

$$P(x,y,z) = P(x_0, y_0, z_0)$$

$$Q(x,y,z) = Q(x_0, y_0, z_0)$$

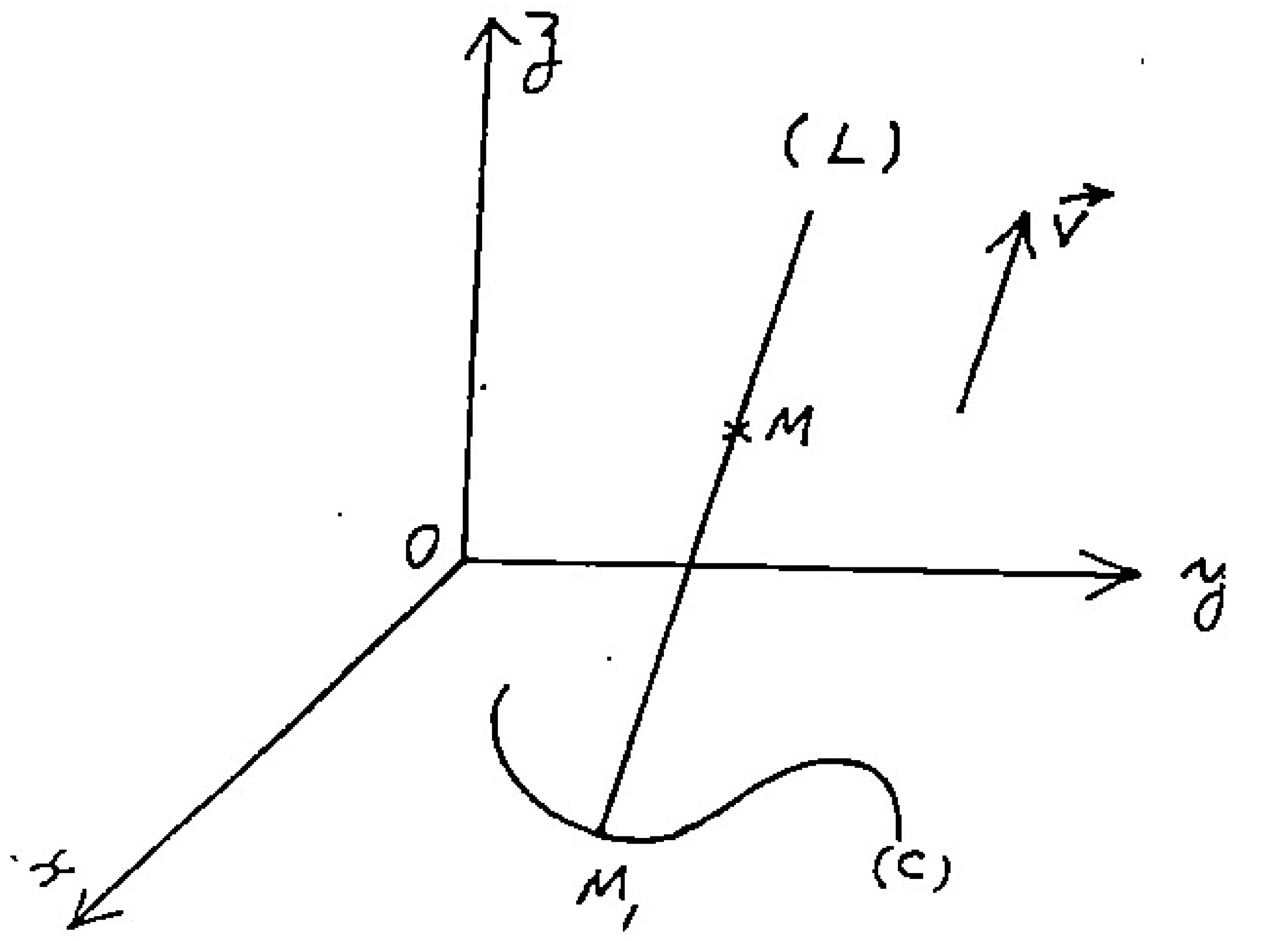
تقع على هذا السطح •

(7.5) ـ معادلة سطح اسطواني دليله يقع في أحد المستويات الاحداثية ومنحى مولداته معلوم :

ليكن (C) دليل السطح الاسطواني واقعا في المستـــوي xoy ومعينا بالمعادلتين :

$$\Phi(x, y) = 0 \quad , \quad z = 0 \qquad (7.5.1)$$

ولنفرض أن p,q,r أمثال توجيه منحى المولدات •



شكل (٦١)

ولتكن $M_1(x_1, y_1, 0)$ نقطة من الدليل ،فمعادلتا المولد (L) المار من M_1 هما :

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z}{r} \qquad (7.5.2)$$

منه :

$$y_1 = y - \frac{q}{r} z \quad , \quad x_1 = x - \frac{p}{r} z$$

وبما أن M_1 نقطة من الدليل فاحداثياتها تحقق المعادلة :

$$\Phi(x, y) = 0$$

أي :

$$\phi\left(x-\frac{p}{r}z\ ,\ y-\frac{q}{r}z\right)=0 \qquad (7.5.3)$$

هذه المعادلة هي معادلة السطح الاسطواني ، ونلاحظ ان شـرط كون المولد (L) لا يوازي الدليل هو $r\neq0$ ،واذا كان $p = q = 0$ كان المولد موازيا للمحور oz وعندئذ تصبح معادلة السطح الاسطواني :

$$\bar{\Phi}(x,y) = 0 \qquad (7.5.4)$$

ونستنتج مما سبق أن أي معادلة في المتحولين x , y فقط تمثل سطحا اسطوانيا مولداته توازي المحور oz ودليلها المنحني $\bar{\Phi}(x,y) = 0\ ,\ z = 0$ وبنفس الطريقة نستنتج ان أي معادلة في المتحولين y , z فقط تمثل سطحا اسطوانيا مولداته توازي المحور ox كما أن أي معادلة في المتحولين x,z فقط تمثل سطحا اسطوانيا مولداته توازي المحور oy .

طريقة ثانية :

يمكن الحصول على نفس النتيجة السابقة باتباع الطريقة العامة في الفقرة (7.4) فاذا كانت :

$$\begin{cases}\Phi(x,y)=0 & (1)\\ z=0 & (2)\end{cases}$$

معادلتي الدليل .

فمعادلتا المستقيم D المار من o وامثال توجيه منحنـاه p , q , r هما :

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$$

أو

$$xr - pz = 0$$
$$yr - qz = 0$$

ومعادلتا اي مولد (L) يوازي D هما :

$$xr - pz = \lambda \qquad (3)$$
$$yr - qz = \mu \qquad (4)$$

فاذا كانت M(x,y,o) نقطة من الدليل فاحداثياتها تحقق المعادلات الاربعة وبالتالي :

$$y=\frac{\mu}{r}\ ,\quad x=\frac{\lambda}{r}$$

نعوض في (1) فنجد :

$$\Phi\left(\frac{\lambda}{r}\ ,\ \frac{\mu}{r}\right)=0$$

نعوض μ , λ بقيمتهما من (3) , (4) يكون :

$$\Phi\left(x-\frac{p}{r}z\ ,\ y-\frac{q}{r}z\right)=0$$

هي معادلة السطح الاسطواني .

وبحالة خاصة عندما يكون المولد موازيا oz يكون $p = q = 0$ عندئذ تكون المعادلة $\Phi(x,y) = 0$ هي معادلة السطح الاسطواني.

مثال (1) :

أوجد معادلة السطح الاسطواني الذي دليله المنحني :

$$z = 0 \ , \ 4x^2 + y^2 = 1$$

وأمثال توجيه مولداته هي (2,-1,3) ثم أوجد أيضا معادلة السطح الاسطواني الذي له نفس الدليل ومولداته توازي المحور oz .

الحل :

معادلتا المستقيم D المار من o وأمثال توجيه منحنـاه (2,-1,3) هما :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$$

$$3x - 2z = 0 \quad , \quad 3y - z = 0$$

ومعادلتا اي مولد يوازي D هما :

$$3x - 2z = \lambda \qquad (1)$$

$$3y - z = \mu \qquad (2)$$

فاذا كانت M(x,y,o) نقطة من الدليل فاحداثياتها تحقق المعادلات الاربعة معا .

من (1) ، (2) نجد :

$$y = \frac{\mu}{3} \quad , \quad x = \frac{\lambda}{3}$$

نعوض في المعادلة الاولى من معادلتي الدليل فنجد :

$$\frac{4\lambda^2}{9} + \frac{\mu^2}{9} = 1$$

بتعويض λ , μ بقيمتيهما من (1) ، (2) نجد :

$$\frac{4}{9}(3x-2z)^2 + \frac{1}{9}(3y-z)^2 = 1$$

$$4(3x-2z)^2 + (3y-z)^2 = 9$$

هي معادلة السطح الاسطواني .

أما معادلة السطح الاسطواني الذي مولداته توازي oz فهي المعادلة :

$$4x^2 + y^2 = 1$$

وهي معادلة خالية من z ، من الشكل :

$$\Phi(x, y) = 0$$

مثال (٢):

اوجد معادلة السطح الاسطواني الذي دليله المنحني :

$$x = 5 \ , \ 9z^2 - 4y^2 = 1$$

والذي مولداته تعامد المستوي :

$$P \equiv x - 2y + 3z + 1 = 0$$

الحل :

بما أن المولدات تعامد المستوي P فان أمثال توجيه منحنى المولدات هي (1,-2,3) فمعادلتا المستقيم D المار من o وله نفس المنحى هما :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$$

أو :

$$-2x - y = 0$$

$$3x - z = 0$$

ومعادلتا اي مولد (L) يوازي D هما :

$$-2x - y = \lambda$$

$$3x - z = \mu$$

لناخذ النقطة $M(5,y,z)$ من المولد(نقطة استناد) فـــان احداثياتها تحقق معادلات المولد والدليل أي :

$$-10 - y = \lambda \quad \text{منه} \quad y = -10 - \lambda$$

$$15 - z = \mu \quad \text{منه} \quad z = 15 - \mu$$

نعوض في المعادلة الاولى من الدليل نجد :

$$9(15-\mu)^2 - 4(10+\lambda)^2 = 1$$

نعوض λ, μ بقيمتيهما من معادلتي المولد نجد :

$$9(15-3x+z)^2 - 4(10-2x-y)^2 = 1$$

مثال (٣) :

اوجد معادلة سطح اسطواني دليلة المنحني :

$$3x^2 - y^2 + 2z^2 = 1 \qquad (1)$$

$$2x + 3y - z = 1 \qquad (2)$$

وأمثال توجيه مولداته هي : $(-1,2,3)$

الحل :

معادلتا المستقيم D المار من o والذي منحاه $(-1,2,3)$ هما :

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

أو

$$2x + y = 0$$

$$3x + z = 0$$

معادلتا أي مولد (L) يوازي D هما :

$$2x + y = \lambda \qquad (3)$$

$$3x + z = \mu \qquad (4)$$

فاذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من المولد فاحداثياتها تحقق معادلات المولد والدليل معا ،لنحذف x, y, z بين المعادلات الاربعة :

من (3) : $y = \lambda - 2x$

من (4) : $z = \mu - 3x$

نعوض في (2) نجد :

$$2x + 3(\lambda - 2x) - (\mu - 3x) = 1$$

منه :

$$x = 3\lambda - \mu - 1$$

$$y = \lambda - 2(3\lambda - \mu - 1)$$

$$y = -5\lambda + 2\mu + 2$$

$$z = \mu - 3(3\lambda - \mu - 1)$$

$$z = 4\mu - 9\lambda + 3$$

نعوض $x, y ; z$ بقيمها في (1) نجد :

$$3(3\lambda - \mu - 1)^2 - (-5\lambda + 2\mu + 2)^2 + 2(4\mu - 9\lambda + 3)^2 = 1$$

نعوض μ, λ بقيمها من (3) ، (4) نجد :

$$3(6x + 3y - 3x - z - 1)^2 - (-10x - 5y + 6x + 2z + 2)^2 + 2(12x + 4z - 18x - 9y + 3)^2 = 1$$

$$3(3x + 3y - z - 1)^2 - (-4x - 5y + 2z + 2)^2 + 2(-6x - 9y + 4z + 3)^2 = 1$$

وهي معادلة السطح الاسطواني المطلوب .

مثال(٤):

أوجد معادلة السطح الاسطواني الذي مولداته توازي المنحـــي $(2,3,0)$ وتمس الكرة : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

الحل :

معادلتنا المستقيم D المار من o وله نفس المنحى هما :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}$$

أو :

$$3x - 2y = 0 \quad , \quad z = 0$$

معادلتنا اي مولد (L) يوازي D هما :

$$3x - 2y = \lambda \quad , \quad z = \mu$$

نفع شرط تماس المولد مع الكرة :

$$\vec{N_1}(3, -2, 0) \quad , \quad \vec{N_2}(0,0,1) \quad , \quad \vec{N_0}(x, y, z)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$2x + 3y = 0$$

بالتخلص من (x,y,z) من المعادلات الاربعة :

$$3x - 2y = \lambda \quad , \quad z = \mu \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad , \quad 2x + 3y = 0$$

نجد :

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1$$

نعوض μ, λ بقيمتيهما فن معادلتي المولد نجد :

$$(3x - 2y)^2 + z^2 = 1$$

وهي معادلة السطح الاسطواني المطلوب .

مثال(٥) :

برهن أن السطح الذي معادلته :

$$x^3+4y^2+z^2-2xy-4yz+xz-1=0$$

هو سطح اسطواني وعيّن مولدات هذا السطح ومعادلتي دليله .

الحل :

ان معادلة السطح تكتب بالشكل :

$$x^3+(2y-z)^2-x(2y-z)-1=0$$

وهي من الشكل :

$$P^3+Q^2-PQ-1=0$$

أي من الشكل :

$$F(P,Q)=0$$

حيث $P\equiv x$, $Q\equiv 2y-z$ وهما الطرفان الايسران من معادلتي مستويين ، اذن فالسطح اسطواني ،ومنحى مولداته هو منحى الفصل المشترك للمستويين :

$$2y-z=0 \quad , \quad x=0$$

$$\vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\vec{j}+2\vec{k}$$

أي أمثال توجيه منحى المولدات هي $(0,1,2)$.

أما الدليل فيمكن اختياره في المستوي xoy وذلك بتعويض $z=0$ في معادلة هذا السطح فنجد :

$$x^2+4y^2-2xy-1=0$$
$$z=0$$

هما معادلتا الدليل .

(7.6) ـ معادلتا المسقط القائم لمنحن معلوم على أحد المستويات الاحداثية :

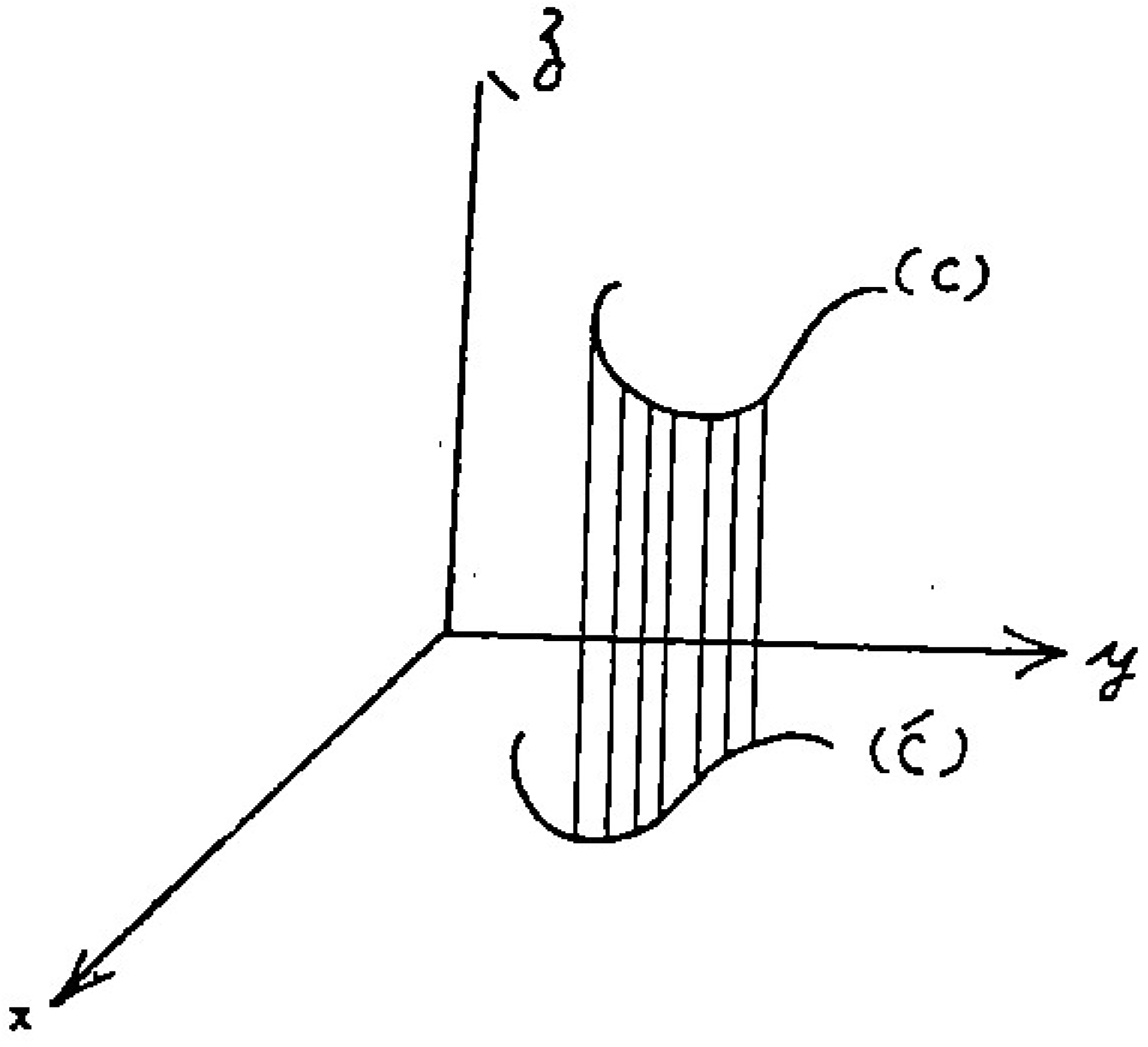
بفرض (C) منحن في الفراغ معين بالمعادلتين :

$$f(x,y,z)=0 \ , \quad g(x,y,z)=0 \qquad (7.6.1)$$

لايجاد مسقط هذا المنحني على المستوي xoy مثلا ،ننزل أعمدة من نقاط هذا المنحني على المستوي xoy هذه الاعمدة تشكل سطحا اسطوانيا مولداته توازي المحور oz ودليله المنحني المعلوم (C) ويكون مسقط المنحني (C) على المستوي xoy هو منحني تقاطع السطح الاسطواني مع المستوي xoy .

فاذا حذفنا z بين المعادلتين(7.6.1) نحصل على معادلة السطح الاسطواني الذي مولداته توازي المحور oz ودليله المنحني المعلوم (C) وهي من الشكل :

$$\phi(x,y)=0$$



شكل (٦٢)

وتكون معادلتا المسقط (C') على المستوي xoy هما :

$$\phi(x,y) = 0 \ , \ z = 0$$

مثال :

أوجد معادلة السطح الاسطواني الذي مولداته توازي المحور ox ودليله المنحني :

$$x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 4$$

$$x + y - z = 2$$

ثم أوجد معادلتي مسقط هذا المنحني على المستوي yoz .

الحل :

نحذف x بين معادلتي الدليل وذلك بحساب x من المعادلة الثانية وتعويضها في الاولى .

من الثانية نجد :

$$x = z - y + 2$$

نعوض في الاولى فنجد :

$$(z-y+2)^2 - 4y^2 + 2z^2 = 4$$

أو :

$$3z^2 - 3y^2 - 2yz - 4y + 4z = 0$$

هي معادلة السطح الاسطواني ،وهي من الشكل $\phi(y,z) = 0$ خالية من x ومعادلتا المسقط على المستوي yoz هما :

$$3z^2 - 3y^2 - 2yz - 4y + 4z = 0$$

$$x = 0$$

(7.7)– السطوح المخروطية :

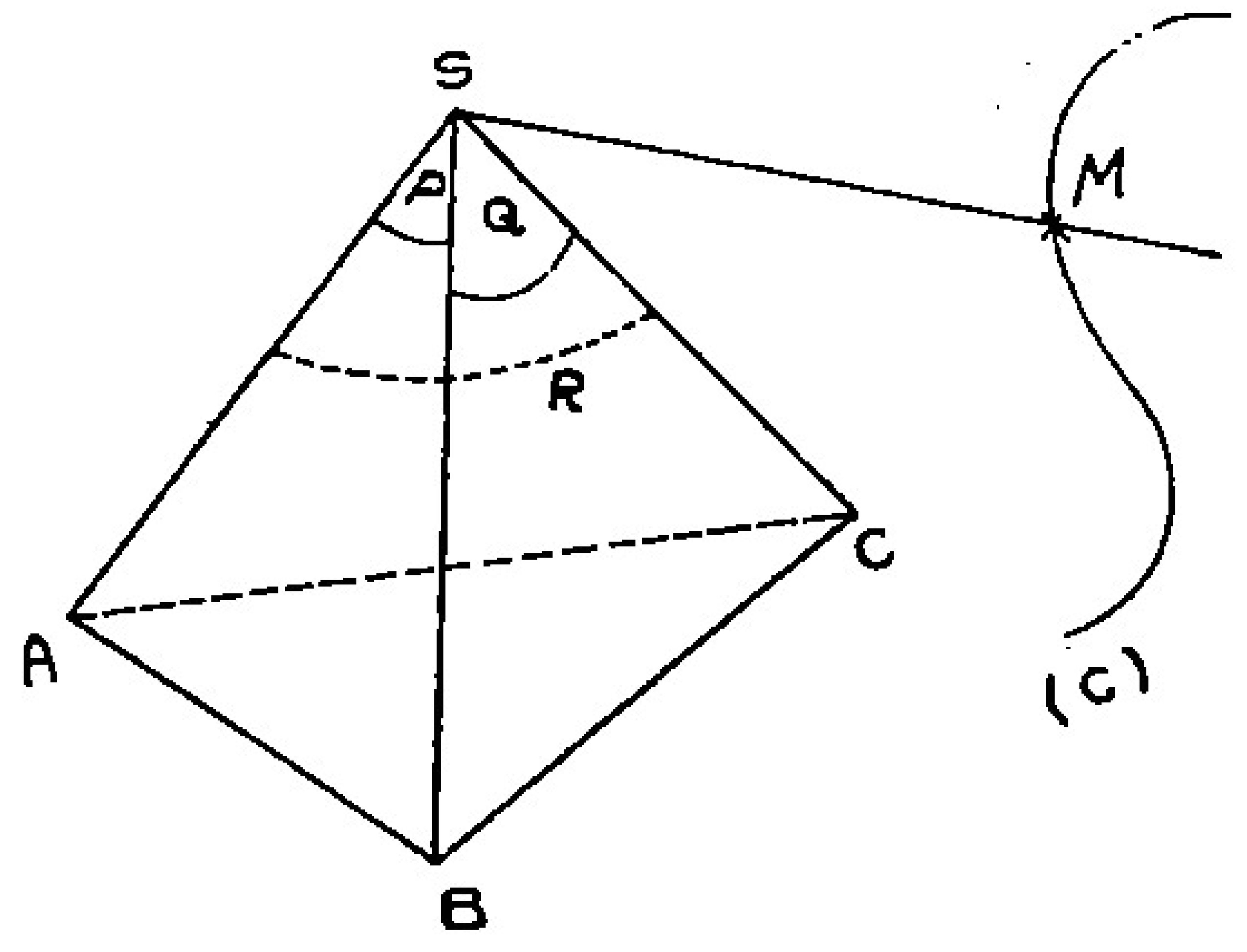
تعريف : السطح المخروطي هو السطح الذي يولده مستقيم يتحرك بحيث يمر من نقطة ثابتة تدعى رأس السطح المخروطي ويستند على منحن معلوم يدعى الدليل . وتسمى المستقيمات التي ترسم هذا السطح بمولدات السطح المخروطي .

(7.8)– معادلة السطح المخروطي :

بفرض $S(a, b, c)$ رأس السطح المخروطي و(C) دليل هذا السطح معين بالمعادلتين :

$$f(x,y,z) = 0 \quad , \quad g(x,y,z) = 0$$

لنوجد معادلة المولد لهذا السطح ،فاذا اعتبرنا الـــرأس (S)
نقطة معينة بتقاطع ثلاثة مستويات الشكل (٦٣):



شكل (٦٣)

$$P \equiv x - a = o$$

$$Q \equiv y - b = o$$

$$R \equiv z - c = o$$

يمكن اعتبار المولد SL كفصل مشترك لمستويين :

الاول : ASL وهو احد مستويات حزمة المستويات المارة بـ SA
المعين بالمعادلتين :

$$R \equiv 0 \ , \ P \equiv 0$$

وتكون معادلة المستوي ASL هي :

$$P - \lambda R = o \qquad (1)$$

والثاني : CSL وهو احد مستويات حزمة المستويات المارة
من SC المعين بالمعادلتين :

$$R \equiv 0 \ , \quad Q \equiv 0$$

وتكون معادلة المستوي CSL هي :

$$Q - \mu R = o \qquad (2)$$

فجملة المعادلتين :

$$P - \lambda R = o$$

$$Q - \mu R = o$$

تعين معادلتي المولد SL او جملة المعادلتين :

$$SL \left| \begin{array}{l} \dfrac{P}{R} = \lambda \\ \\ \dfrac{Q}{R} = \mu \end{array} \right.$$

فاذا كانت M (x,y,z) نقطة استناد المولد SL على المنحني (C) فان احداثيات هذه النقطة تحقق المعادلات الاربعة :

$$\frac{P}{R} = \lambda \ , \quad \frac{Q}{R} = \mu$$

$$f(x,y,z) = o \quad , \quad g(x,y,z) = o$$

بحذف x,y,z بين هذه المعادلات نحصل على العلاقة :

$$F(\lambda, \mu) = o$$

فاذا عوضنا μ, λ بقيمتهما من معادلتي المولد نحصل على
المعادلة :

$$F\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0 \qquad (7.8.1)$$

هي معادلة السطح المخروطي ،ونلاحظ أن هذه المعادلة متجانسة بالنسبة الى P,Q,R, ويمكن أن نقول : ان المعادلة العامة للسطوح المخروطية هي من الشكل :

$$F(P,Q,R) = 0 \qquad (7.8.2)$$

حيث F تابع متجانس بالنسبة الى $P,Q\,,\,R$ التي هي الاطراف اليسرى الثلاثة مستويات متقاطعة في رأس السطح المخروطي .

ويمكن أن نبرهن ان كل معادلة من هذا الشكل تمثل سطحامخروطيا يتعين رأسه بتقاطع المستويات الثلاثة $P\equiv0\,,\,Q\equiv0\,,\,R\equiv0$ وبحالة خاصة المعادلات المتجانسة بالنسبة الى x,y,z التي درسناها في الفصل الرابع هي سطوح مخروطية رأسها مبدأ الاحداثيات مهما كانت درجة التجانس .

وهذا يمكن الحصول على هذه النتيجة كحالة خاصة من الحالة العامة (7.8) فاذا كان رأس السطح المخروطي نقطة المبدأ o فان هذه النقطة تتعين بالمستويات :

$$P \equiv x = 0\ ,\ Q \equiv y = 0\ ,\ R \equiv z = 0$$

وعندئذ معادلة السطح المخروطي هي :

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = o$$

وهي معادلة متجانسة بالنسبة للمتحولات $x\,,\,y\,,\,z$.

مثال(١) :

اوجد معادلة سطح مخروطي رأسه النقطة $(0,-2,1)$ ودليله القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad , \quad z = o$$

الحل :

نعتبر الرأس نقطة تقاطع المستويات الثلاثة :

$$R \equiv z - 1 = 0 \quad , \quad Q \equiv y + 2 = o \quad , \quad P \equiv x = o$$

معادلتا المولد : (1) , (2)

$$\frac{x}{z-1} = \lambda \quad , \quad \frac{y+2}{z-1} = \mu$$

معادلتا الدليل : (3) , (4)

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad , \quad z = o$$

فاذا كانت $M(x,y,o)$ نقطة استناد المولد على الدليل فهذه النقطة تحقق احداثياتها المعادلات الاربعة فيكون :

$$x = -\lambda \qquad y = -\mu - 2$$

نعوض في المعادلة الاولى للدليل نجد :

$$\frac{\lambda^2}{4} + (\mu + 2)^2 = 1 \qquad (5)$$

نعوض λ و μ بقيمتيهما من (1),(2) فنجد :

$$\frac{x^2}{4(z-1)^2} + \left(\frac{y+2}{z-1} + 2\right)^2 = 1$$

بفك الاقواس والاصلاح نجد :

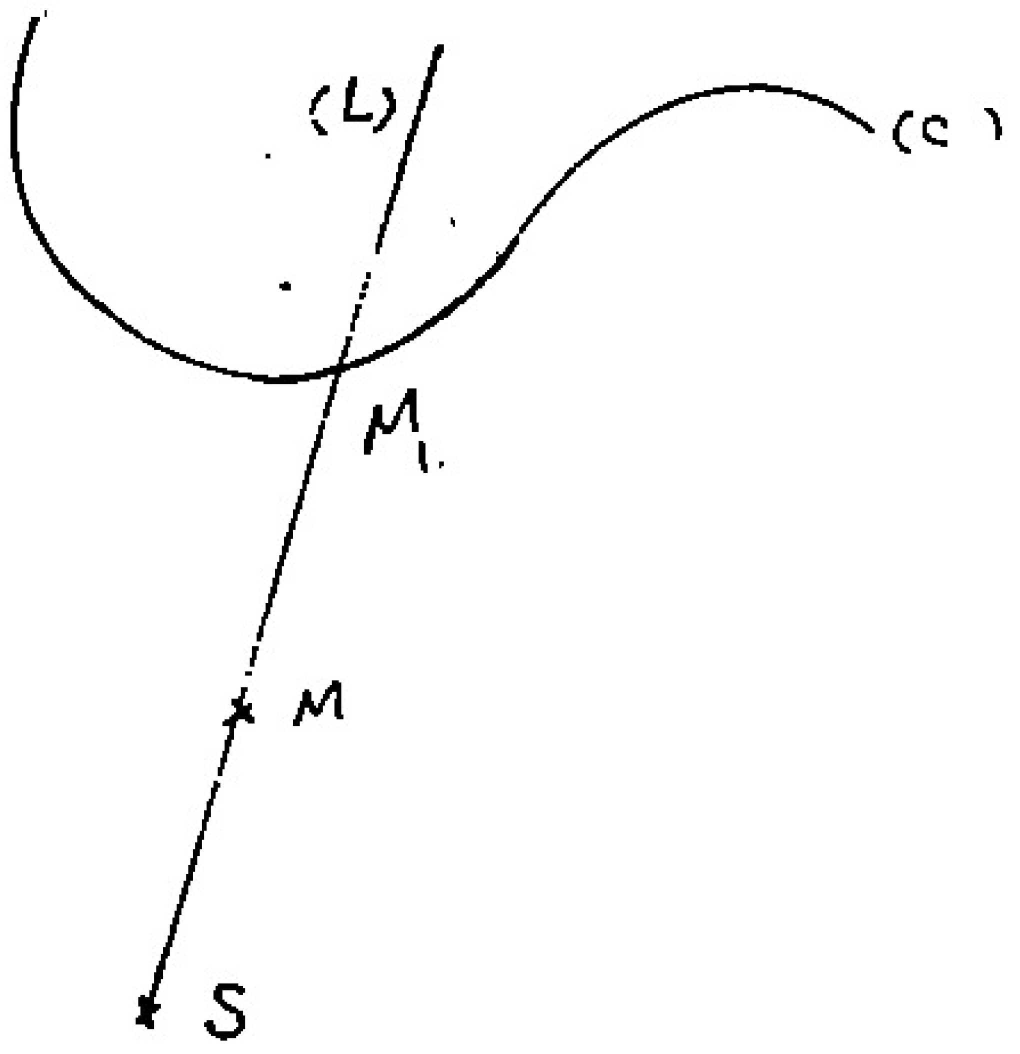
$$x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16yz + 8z - 4 = o$$

هي معادلة السطح المخروطي المطلوب .

(7.9) ـ طريقة ثانية لايجاد معادلة السطح المخروطي :

بفرض $S(a, b, c)$ رأس السطح المخروط ودليله المنحني :

$$f(x,y,z)=0 \quad , \quad g(x,y,z)=0$$



شكل (٦٤)

لتكن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة استناد المولد SL على الدليل (C)

ولتكن $M(x, y, z)$ نقطة من السطح المخروطي (نقطة من المولد)

فتكون معادلتا المولد SL :

$$\frac{x-x_1}{a-x_1} = \frac{y-y_1}{b-y_1} = \frac{z-z_1}{c-z_1} = \lambda$$

$$x_1 = \frac{x-a\lambda}{1-\lambda} \quad , \quad y_1 = \frac{y-b\lambda}{1-\lambda} \quad , \quad z_1 = \frac{z-c\lambda}{1-\lambda}$$

نعوض x_1, y_1, z_1 في معادلتي الدليل لنحصل على معادلتين تحويان الوسيط λ بحذف λ بين هاتين المعادلتين نحصل على معادلة السطح المخروطي .

تطبيق : حل المثال السابق بهذه الطريقة.

الحل :

نقطة استناد المولد على الدليل هي $M_1(x_1,y_1,0)$, $M(x,y,z)$ من المولد معادلتا المولد SL :

$$\frac{x-x_1}{-x_1} = \frac{y-y_1}{-2-y_1} = \frac{z}{1}$$

$$x_1 = \frac{x}{1-z} \quad , \quad y_1 = \frac{y+2z}{1-z}$$

بالتعويض في معادلة القطع الناقص نجد :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{y+2z}{1-z}\right)^2 = 1$$

منه :

$$x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16yz + 8z - 4 = 0$$

مثال(٢) :

أوجد معادلة سطح مخروطي رأسه نقطة الاصل ودليله .

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad (1)$$

$$x + 2y - z + 3 = = 0 \qquad (2)$$

الحل بالطريقة العامة :

المستويات التي تعين رأس السطح المخروطي هي :

$$R \equiv z = o \quad , \quad Q \equiv y = o \quad , \quad P \equiv x = o$$

معادلتا المولد :

$$\frac{x}{z} = \lambda \quad , \quad \frac{y}{z} = \mu$$

منه :

$$y = \mu z \quad , \quad x = \lambda z$$

نعوض في (2) نجد :

$$\lambda z + 2\mu z - z + 3 = o$$

منه :

$$x = \frac{-3\lambda}{\lambda + 2\mu - 1} \ , \ y = \frac{-3\mu}{\lambda + 2\mu - 1} \ , \ z = \frac{-3}{\lambda + 2\mu - 1}$$

نعوض z,y,x في (1) نجد :

$$\frac{9\lambda^2}{16(\lambda + 2\mu - 1)^2} + \frac{9\mu^2}{4(\lambda + 2y - 1)^2} + \frac{1}{(\lambda + 2\mu - 1)^2} = 1$$

منه :

$$9y^2 + 36\mu^2 + 16 = 16(\lambda + 2\mu - 1)^2$$

نعوض μ , λ بقيمتيهما من معادلتي المولد نجد :

$$9\frac{x^2}{z^2} + \frac{36y^2}{z^2} + 16 = 16\left(\frac{x}{z} - \frac{2y}{z} - 1\right)^2$$

$$9x^2 + 36y^2 + 16z^2 = 16(x - 2y - z)^2$$

$$9\left(x^2 + 4y^2 + \frac{16z^2}{9}\right) = 16(x - 2y - z)^2$$

$$9\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right) = (x - 2y - z)^2$$

تمرين : حل المثال(٢) بالطريقة الثانية.

ملاحظة هامة :

اذا كان رأس السطح المخروطي في مبدأ الاحداثيات فان معادلته ستكون معادلة متجانسة في المتحولات (x,y,z) لذلك نلجأ في مثل هذه الحالة الى الطريقة السهلة التالية والتي نوضحها بحل المثال (٢) :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad (1)$$

$$x + 2y - z + 3 = o \qquad (2)$$

المعادلة (2) تكتب بالشكل :

$$\frac{1}{9}(x + 2y - z)^2 = 1 \qquad (3)$$

بطرح (3) من (1) نجد :

$$9\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)=(x-2y-z)^2$$

مثال(٣):

أثبت أن السطح :

$$x^2+2y+4z-2yz-4=o$$

هو سطح مخروطي .

الحل :

ان المعادلة السابقة تكتب بالشكل :

$$x^2+(z-1)(4-2y)=o$$

هذه المعادلة من الشكل :

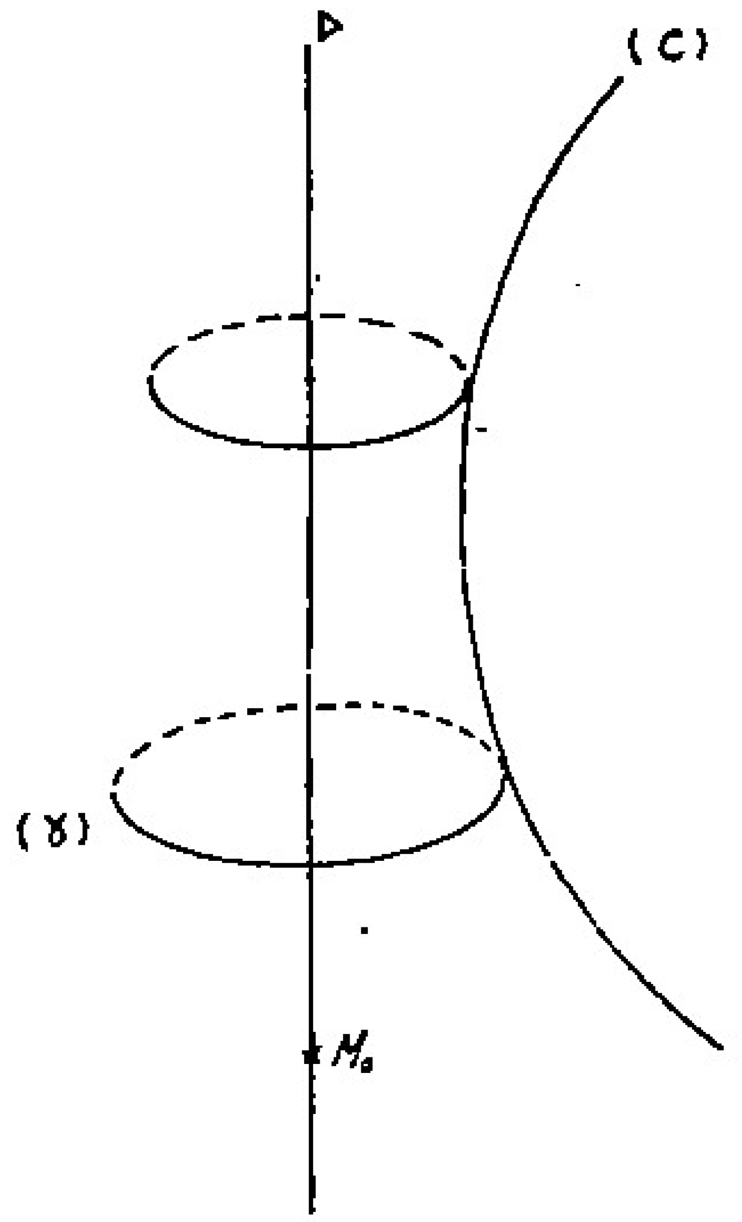
$$P^2-QR=o$$

حيث $P\equiv x \quad , \quad Q\equiv z-1 \quad , \quad R\equiv 4-2y$

وهي الاطراف اليسرى من معادلات ثلاثة مستويات متقاطعة في النقطة S (0,2,1). وبما أن معادلة السطح متجانسة بالنسبة الى P,Q,R فهذا السطح هو سطح مخروطي رأسه النقطة S .

(7.10) ـ السطوح الدورانية :

تعريف : نعرف السطح الدوراني بأنه السطح الذي يولده منحن (C) بدورانه حول مستقيم ثابت Δ . نسمي المنحني(C) بالمولد والمستقيم الثابت بمحور الدوران .



شكل (٦٥)

ينتج من هذا التعريف أن كل نقطة مثل M من المنحني المولد C ترسم بدورانها حول المحور Δ محيط دائرة (γ) مستويها يعامد المحور Δ ومركزها يقع على هذا المحور ،هذه الدائرة (γ) تدعى بمتوازية السطح الدوراني ومجموعة الدوائر التي ترسمها نقاط المنحني المولد (C) تدعى بمتوازيات السطح الدوراني . واذاقطعنا السطح الدوراني بنصف مستو يمر من المحور Δ نحصل على منحن يدعى بالمنحني الزوالي وهذا المنحني يمكنه توليد السطح الدوراني أيضا والمستويات المارة بالمحور Δ تدعى بمستويات الزوال .

(7.11) - معادلة السطح الدوراني :

يمكن اعتبار السطح الدواني بأنه سطح تولده مجموعة المتوازيات السابقة التي تستند على المنحني الزوالي (C) .

فاذا كان المنحني (C) معينا بالمعادلتين :

$$f(x,y,z) = 0 \quad , \quad g(x,y,z) = 0 \qquad (7.11.1)$$

وكان محور الدوران Δ معينا بالنقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ وامثال توجيهه p,q,r . فيمكن اعتبار اي متوازية γ عبارة عن تقاطع كرة مركزها M_0 ونصف قطرها متغير مع مستو P يعامد المحور فتكون جملة المعادلتين :

$$(\gamma) \left| \begin{array}{l} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda \\ px+qy+rz=\mu \end{array} \right| \qquad (7.11.2)$$

هي المعادلة العامة لهذه المتوازيات ،حيث μ, λ وسيطان .

من شرط استناد المتوازية γ على المنحني (C) نحصل على علاقة بين μ و λ من الشكل :

$$F(\lambda,\mu)=0$$

بتعويض λ,μ بقيمتيهما من (7.11.2) نحصل على معادلة السطح الدوراني :

$$F[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \ , \ px+qy+rz]=0$$

وهي من الشكل :

$$F(S,P)=0$$

حيث S تمثل الطرف الايسر من معادلة كرة مركزها M_0 و P تمثل

الطرف الايسر من معادلة مستو يعامد Δ .

ويمكن أن نبرهن ان كل معادلة من هذا الشكل تمثل سطحا دورانيا محور دورانه يعامد المستوي $P \equiv 0$ ويمر بمركز الكرة $S \equiv 0$.

مثال(1) :

اوجد معادلة السطح الدوراني الذي محور دورانه المستقيم المعين بالمعادلتين :

$$y = 0 \quad , \quad z = 1$$

والذي يمس سطح المخروط :

$$2x^2 + z^2 - y^2 = 0$$

الحل :

نلاحظ أن محور الدوران عبارة عن مستقيم يوازي المحور ox ويمر بالنقطة $M_0(0,0,1)$ وامثال توجيه منحاه (1,0,0) .

فمعادلتا المتوازيات :

$$x^2+y^2+(z-1)^2=\lambda \qquad (1)$$

$$x=\mu \qquad (2)$$

ولنوجد الان شرط تماس المتوازيات مع المخروط :

$$2x^3+z^2-y^2=0 \qquad (3)$$

$$\vec{N_1}(x,y,z-1) \ , \ \vec{N_2}(1,0,0) \ , \ \vec{N_0}(2x,-y,z)$$

شرط التماس :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & o & o \\ x & y & z-1 \\ 2x & -y & z \end{vmatrix} = o$$

$$yz + y(z-1) = o$$

$$y(2z-1) = o \qquad (4)$$

اما $y = 0$ فهي غير مقبولة لانها لا تقابل نقطة حقيقية من سطح المخروط او $z = \frac{1}{2}$ اذن المعادلة الرابعة الناتجة من شرط التماس هي $z = \frac{1}{2}$ •

بالتخلص من x , y , z من المعادلات الاربعة :

من (3) نجد :

$$2\mu^2 + \frac{1}{4} = y^2$$

من (1) نجد :

$$\lambda - \mu^2 - \frac{1}{4} = y^2$$

منه :

$$2\mu^2 + \frac{1}{4} = \lambda - \mu^2 - \frac{1}{4}$$

$$\lambda - 3\mu^2 = \frac{1}{2} \qquad (5)$$

نعوض لـ μ ، λ بقيمتيهما من (1) ، (2) نجد :

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 3x^2 = \frac{1}{2}$$

منه :

$$y^2 + (z-1)^2 - 2x^2 = \frac{1}{2}$$

وهي معادلة مجسم قطع زائد ذي فرع واحد •

(7.12) – السطوح الدورانية التي محورها احد المحاور الاحداثية :

اذا فرضنا ان المحور Δ منطبق على المحور oz ففي هذه الحالة يمكن تعيين متوازية (γ) بتقاطع اسطوانة محورها oz مع مستو يعامد oz فمعادلتا اي متوازية تصبح :

$$(\gamma) \begin{cases} \quad + y^2 = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

ومن شرط الاستناد على المولد (C) نحصل على العلاقة :

$$F(\lambda , \mu) = o$$

ومنه :

$$F(x^2 + y^2 , z) = o \qquad (7.12.1)$$

هي معادلة السطح الدوراني •

فاذا قطعنا السطح الدوراني حول المحور oz بالمستوي yoz نحصل على منحن نسميه بالمنحني الزوالي الرئيسي ويرتسم بطوله الحقيقي على المستوي yoz ومعادلة المنحني الزوالي الرئيسي في المستوي yoz هي :

$$F(y^2 , z) = o \qquad (7.12.2)$$

بالمقارنة بين (7.12.1) , (7.12.2) نستنتج أنه للحصول على معادلة السطح الدوراني حول oz يكفي ان نستبدل كل y^2 بـ $x^2 + y^2$ في معادلة المنحني الزوالي الرئيسي •

مثال(١):

ان معادلة المنحني الزوالي الرئيسي لكرة مركزها في مبـــدأ الاحداثيات ونصف قطرها R هي :

$$y^2 + z^2 = R^2$$

وهي دائرة واقعة في المستوي yoz ،فاذا دورنا هذه الدائـــرة حول المحور oz نحصل على كرة ،ولايجاد معادلتها نستبدل كل مــن y^2 في معادلة المنحني الزوالي الرئيسي بـ x^2+y^2 فنجد :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

هي معادلة الكرة المطلوبة.

كذلك اذا دورنا هذه الدائرة حول المحور oy نحصل على نفـــس الكرة وللحصول على معادلتها نستبدل كل z^2 بـ z^2+x^2 فنجد

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

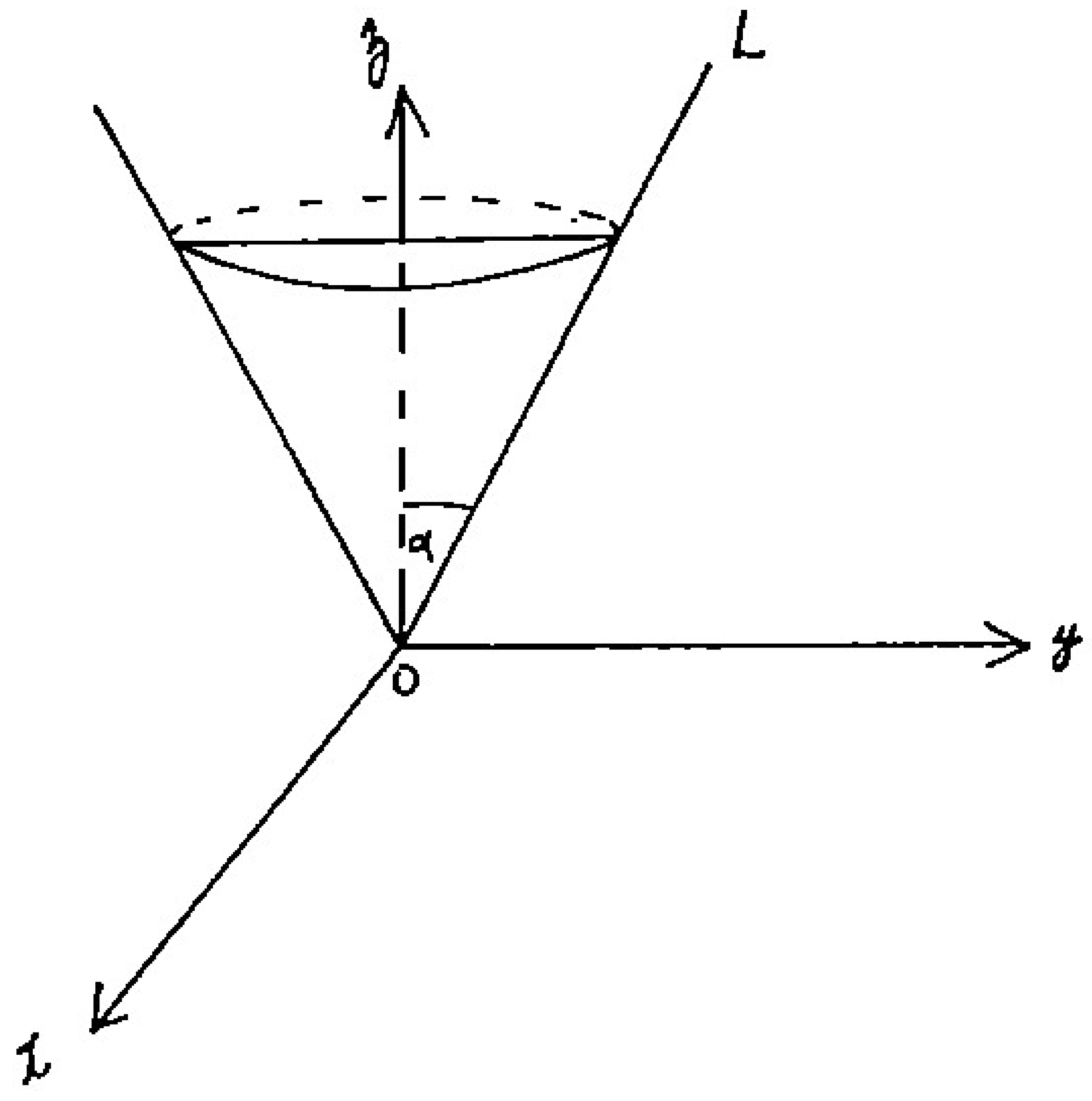
مثال(٢):

بفرض oL مستقيم واقع في المستوي yoz يصنع مع المحور oz الزاوية α شكل(٦٦) فاذا دورنا المستقيم oL حول المحور oz نحصل على مخروط دوراني رأسه o ونصف زاوية رأسه α ،وللحصول على معادلـــة هذا المخروط ،نوجد معادلة المستقيم oL كخط زوالي رئيسي معادلته:

$$y = z.tg\alpha$$

وبما أن الدوران حول المحور oz فنستبدل في المعادلة السابقة كل y بـ $\sqrt{y^2+x^2}$ فنجد :

$$x^2 + y^2 = z^2 .\ tg^2\alpha$$



شكل (٦٦)

مثال(٣):

أوجد معادلة السطح الدوراني الناتج عن دوران المستقيم :

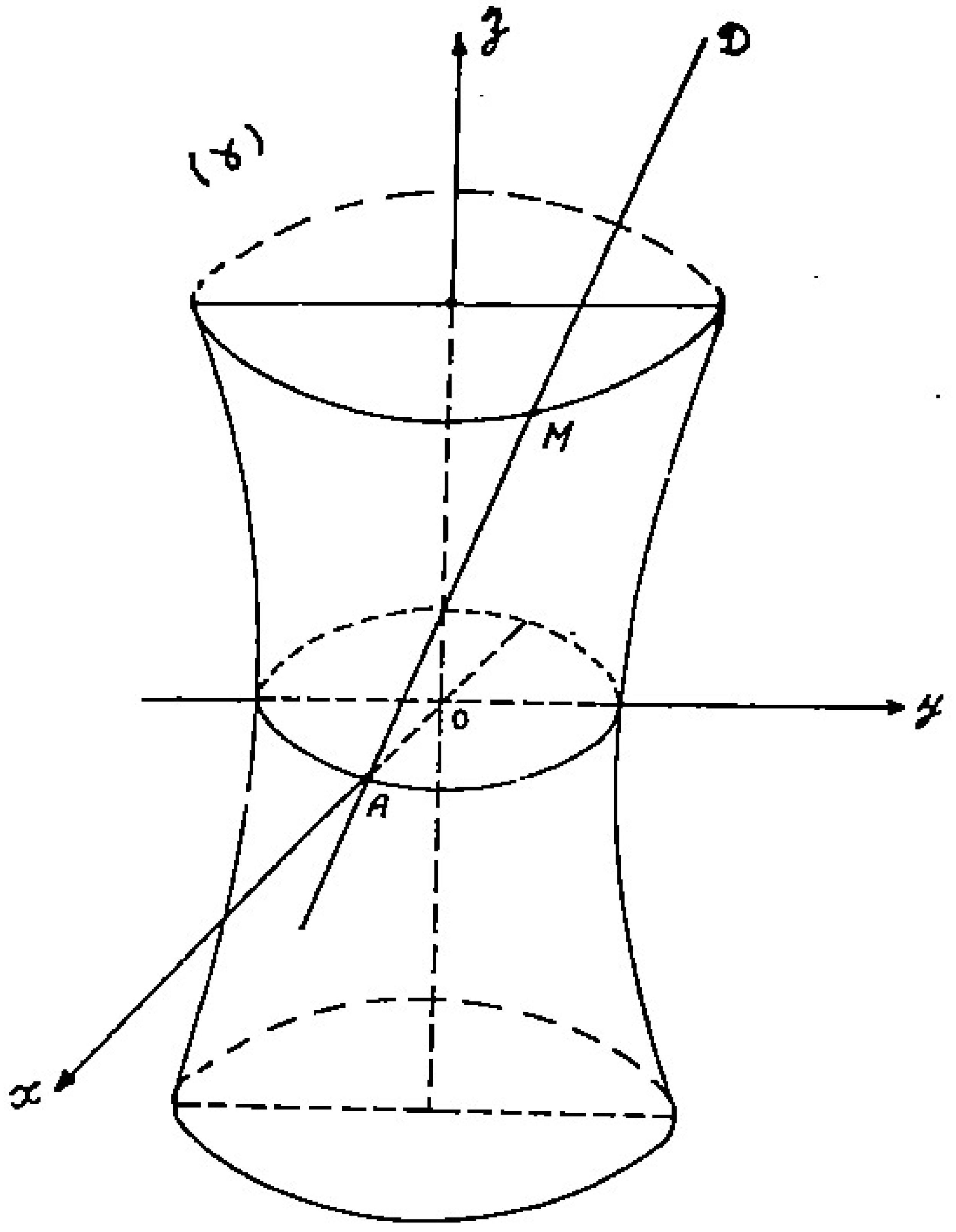
$$D \left| \begin{array}{ll} x = a & (1) \\ z = m\,y & (2) \end{array} \right.$$

حول المحور oz .

الحل :

ان معادلتي اي متوازية (γ) هما:

$$(\gamma) \left| \begin{array}{ll} x^2 + y^2 = \lambda & (3) \\ z = \mu & (4) \end{array} \right.$$



شكل (٦٧)

اذا كتبنا شرط استناد المتوازية على المستقيم S نجدالعلاقة :

$$a^2 ⅃ \frac{\mu^2}{m^2} = \lambda$$

نعوض μ , λ بقيمتيهما من معادلتي المتوازية فنجد :

$$a^2 + \frac{z^2}{m^2} = x^2 + y^2$$

ومنه :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2m^2} = 1$$

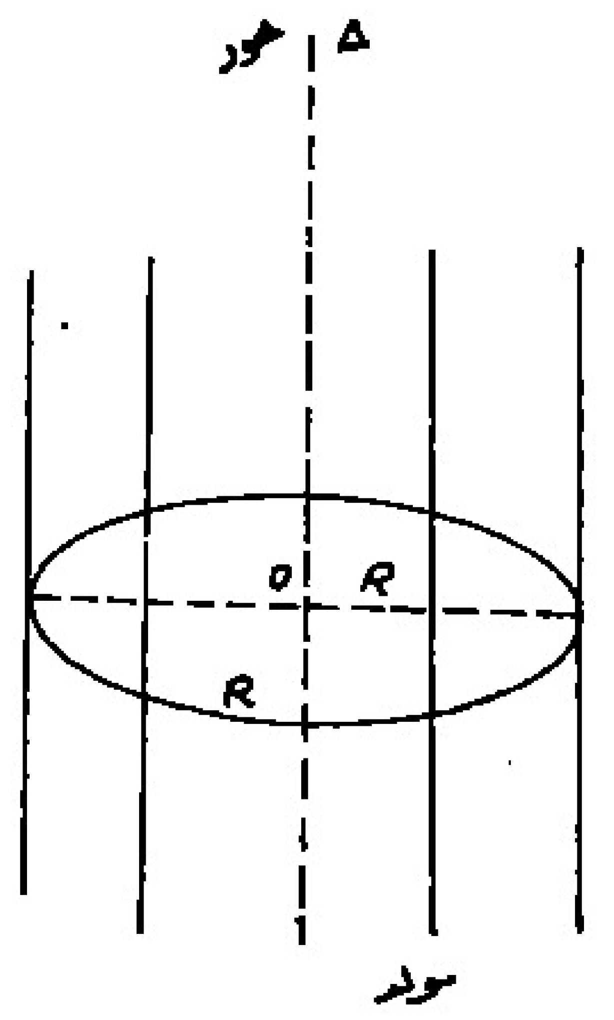
وهي معادلة مجسم قطع زائد دوراني ذي فرع وحيد وذلـــــك لان الزوالية الرئيسية هي قطع زائد معادلته :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2m^2} = 1$$

ونستنتج من هذين المثالين : ان كل مستقيم لا يلاقي محـــورا أو لا يوازيه يولد بدورانه حول هذا المحور مجسم قطع زائد ذي فــرع وحيد دوراني ،وان كل مستقيم يلاقي المحور يولد بدورانه حول هـــذا المحورمخروطا دورانيا اما اذا كان هذا المستقيم موازيا للمحـــور فيولد بدورانه اسطوانية دورانية.

(7.13) ــ الاسطوانة الدورانية :

اذا كان دليل السطح الاسطواني دائرة وكانت مولدات هذا السطح تعامد مستوي الدليل قلنا عن هذا السطح انه اسطواني دوراني لانـــه يمكن توليد هذا السطح من دوران مستقيم يوازي محور الدائرة حـــول هذا المحور .

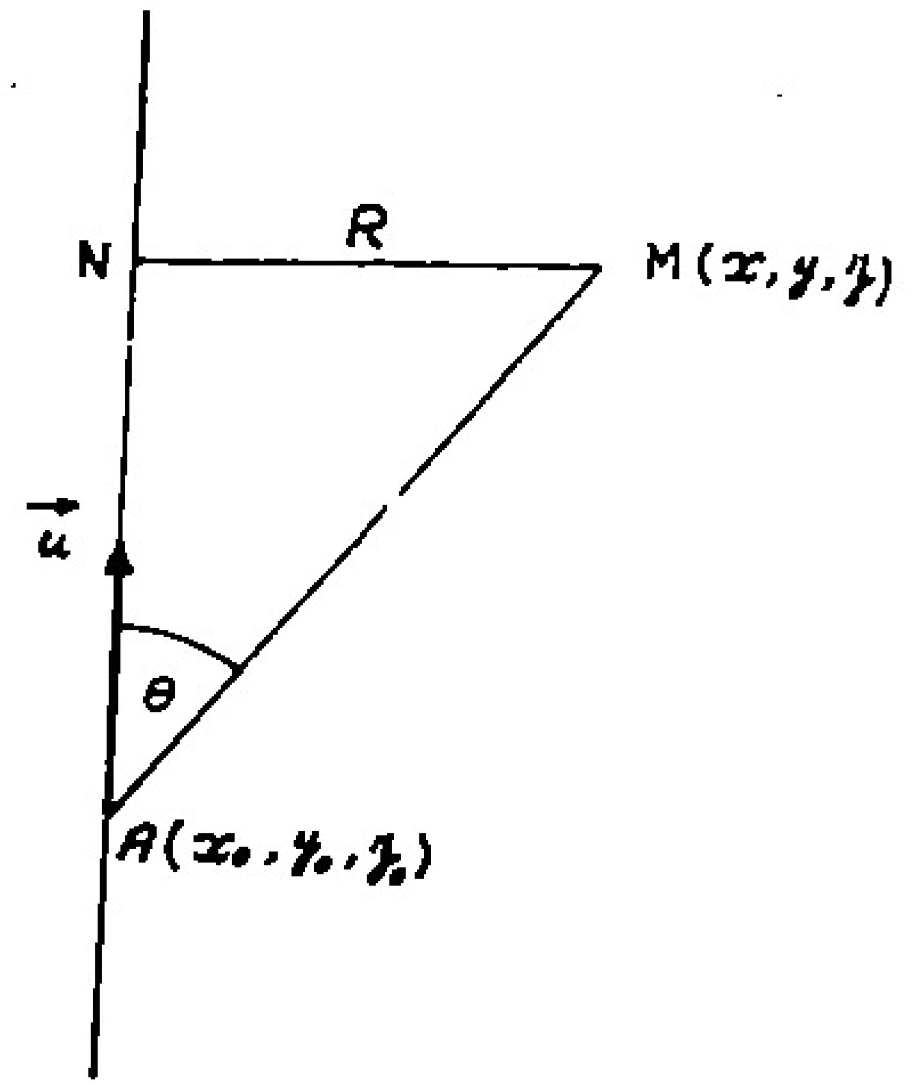


شكل (٦٨)

ويمكن أن نعرف الاسطوانة الدورانية بأنها المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي تبعد بعداً ثابتاً R عن مستقيم ثابت يدعى محور الاسطوانة و R نصف قطرها . والجدير بالذكر أن المقصود بالعبارة " اسطوانة دورانية " هو السطح الاسطواني الدوراني وليست الاسطوانة كمجسم .

(7.14) ـ معادلة الاسطوانة الدورانية :

بفرض R نصف قطر اسطوانية دورانية (دائرية قائمة) وانمحورها Δ يمر بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وجيوب تمام توجيه هذا المحور هي α, β, γ ولنوجد معادلة هذه الاسطوانة . Δ :



شكل (٦٩)

لتكن M(x,y,z) نقطة من سطح الاسطوانة في جميع اوضاع M على هذا السطح يكون MN=R حيث N مسقط M على المحور Δ شكل(٦٩) فان العلاقة الآتية محققة :

$$\overline{AM}^2 - \overline{AN}^2 = R^2 \qquad (7.14.1)$$

لكن

$$\overline{AN} = |\vec{AM}| \,.\cos\theta$$

أو :

$$\overline{AN} = \vec{AM} \,.\, \vec{u}$$

حيث $\vec{u}$ شعاع الواحدة المحمول على المحور Δ ومنه :

$$\overline{AN} = (x-x_0)\alpha + (y-y_0)\beta + (z-z_0)\gamma$$

بالتعويض في (7.14.1) نجد :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - [\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0)]^2 = R^2 \qquad (7.14.2)$$

مثال: اكتب معادلة اسطوانةدائرية قائمة نصف قطرها R = 2 ومحورها المستقيم :

$$x = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$$

الحل:

المحور Δ يمر بالنقطة A(0,2,0) وامثال توجيه منحاه :

$$u = 1 \ , \ v = 2 \ , \ w = -2$$

ومنه :

$$\alpha = \frac{1}{3} \ , \ \beta = \frac{2}{3} \ , \ \gamma = -\frac{2}{3}$$

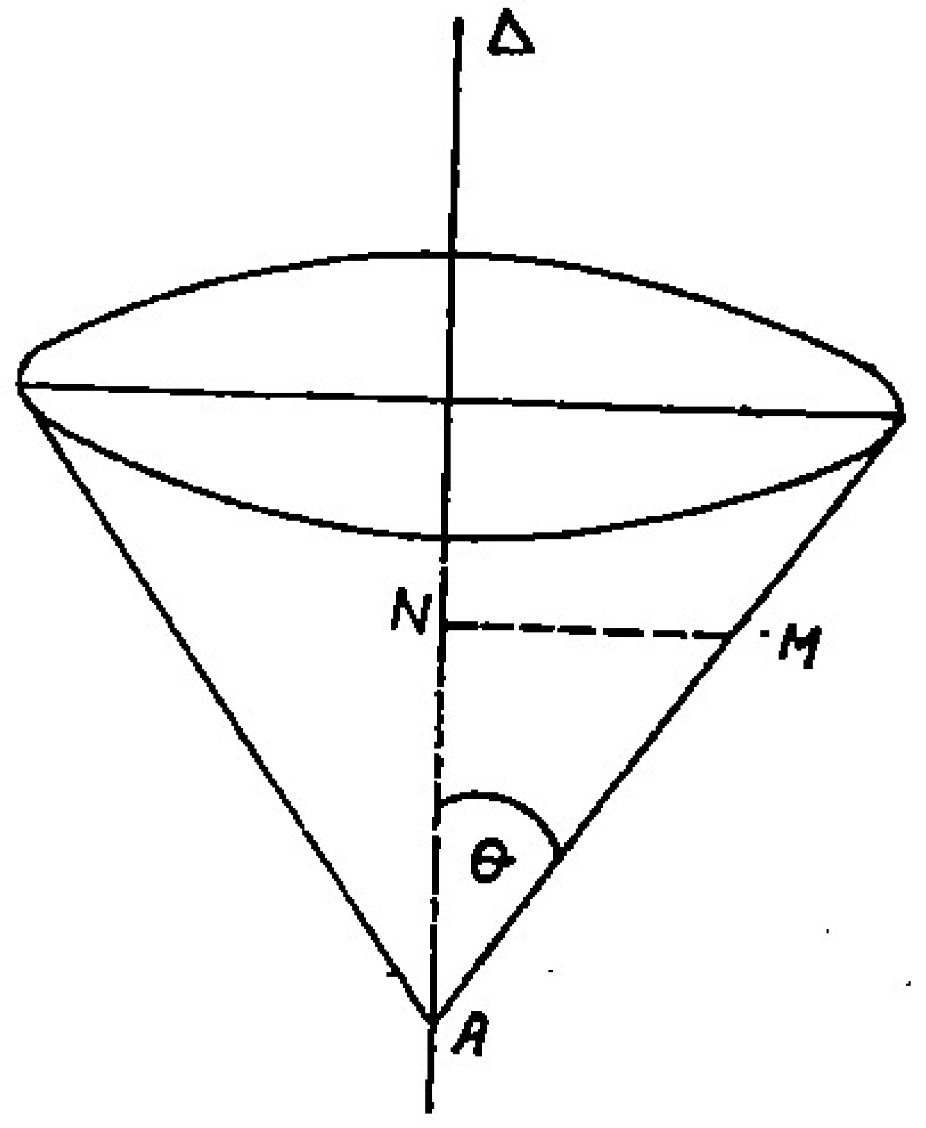
بالتعويض في (7.14.2) نجد :

$$x^2+(y-2)^2+z^2-\frac{1}{9}(x+2y-2z-4)^2=4$$

$$8x^2+5y^2+5z^2+8yz+4xz-4xy+8x-20y-16z-16=0$$

(7.15)– المخروط الدوراني :

اذا كان دليل السطح المخروطي دائرة وكان رأس هذا السطح واقعا على محور هذه الدائرة عندئذ نقول من هذا السطح بأنه مخروط دوراني ونلاحظ ان جميع مولداته تصنع زاوية ثابتة θ مع المحور، هذه الزاوية تدعى نصف زاوية رأس المخروط • وقد سمي دورانيا لانه يمكن توليد هذا المخروط بدوران مستقيم حول مستقيم آخر قاطع له يسمى محورالدوران •



شكل (٧٠)

(7.16)– معادلة المخروط الدوراني :

بفرض A (a,b,c) رأس المخروط ولتكن α, β, γ جيوب تمام توجيه محوره Δ ولتكن θ نصف زاوية رأسه ولنوجد معادلته •

لنأخذ النقطة M (x,y,z) من سطح المخروط ،ولتكن N مسقطها على المحور Δ ففي جميع أوضاع M على سطح المخروط تتحقق العلاقة :

$$\overline{AN}^2=\overline{AM}^2 \cdot \cos^2\theta \qquad (7.16.1)$$

$$[(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma]^2=[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]\cos^2\theta \qquad (7.16.2)$$

وهي معادلة المخروط الدوراني •

مثال:

اكتب معادلة مخروط دوراني رأسه النقطة A(1,0,-2) ونصف زاوية رأسه 60 درجة وأمثال توجيه محوره (2,-2,1)•

الحل :

جيوب تمام توجيه المحور :

$$\alpha=\frac{2}{3} \quad , \quad \beta=\frac{-2}{3} \quad , \quad \gamma=\frac{1}{3}$$

لنأخذ M(x,y, z) من سطح المخروط ولتكن N مسقطها على المحور عندئذ :

$$\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 \cdot \cos^2\theta$$

$$\left[\frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{3}(y) + \frac{1}{3}(z+2)\right]^2$$

$$\frac{1}{4}\left[(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2\right]$$

$$4(2x-2y+z)^2 = 9(x^2+y^2+z^2-2x+4z+5)$$

$$7x^2+7y^2-5z^2-16yz+16zx-32xy+18x-36z-45=0$$

تمارين (٧)

١- أوجد معادلة اسطوانة دليلها المنحني :

$$x^2+y^2+2z^2=12 \;,\; x-y+z=1$$

ومولداتها توازي المحور ox .

ثم أوجد ايضا معادلة اسطوانة دليلها نفس المنحني السابق ومولداتها توازي المحور oy .

٢- اوجد معادلة اسطوانة دليلها المنحني :

$$x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$$
$$x+2y-z=0$$

ومولداتها توازي المستقيم :

$$y=2 \;,\; z=-1$$

٣- اوجد معادلة اسطوانة دليلها القطع الناقص :

$$4y^2+z^2-8y+4z+4=0 \;,\; x=0$$

ومولداتها توازي المستقيم المار بالنقطتين (2,-1,-1) و (0,-2,1) .

٤- اوجد معادلة اسطوانة دليلها الدائرة :

$$x^2+y^2-2y-3=0 \;,\; z=0$$

وتصنع مولداتها زوايا حادة متساوية مع المحاور الاحداثية .

٥- أوجد معادلة اسطوانة مولداتها توازي المحور ox ودليلها المنحني :

$$x^2-4y^2+2z^2-4=0 \quad , \quad x+y-z-2=0$$

ثم أوجد معادلتي مسقط المنحني الدليل على المستوي yoz .

٦- اوجد معادلة اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها 3 ومحورها مستقيم يمر بالنقطة (1,1,-1) وأمثال توجيهه (2,-2,1)

٧- اوجد معادلة اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها 2 ومحورها المستقيم :

$$x-1=2y=6-2z$$

٨- اوجد معادلة مخروط رأسه نقطة الاصل ودليله المنحني :

$$x^2+y^2+z^2=16, 9x^2-36y^2+4z^2=36$$

٩- اوجد معادلة مخروط رأسه نقطة الاصل ودليله المنحني :

$$y^2-z^2=4 \ , \ 2x-y-z=3$$

١٠- مخروط معادلته :

$$x^2+y^2-5z^2=0$$

قطع هذا المخروط بالمستوي :

$$2y-5z+1=0$$

اثبت ان مسقط مقطعه بهذا المستوي على المستوي xoy هو قطع ناقص ، أوجد مركزه وتباعده المركزي ($e=\frac{c}{a}$) .

١١- اوجد معادلة مخروط رأسه النقطة (2,0,1) ودليله القطع الناقص : $9y^2+4z^2=36 \quad , \quad x=0$

١٢- اوجد معادلة مخروط رأسه النقطة (1,2,-3) ودليله الدائرة :

$$x^2+z^2=4 \ , \ y=2$$

١٣- ثلاثة مستقيمات تمر بنقطة الاصل وأمثال توجيهها (1,2,2)، (2,3,6)، (3,4,12) اثبت أن أمثال توجيه محور المخروط الدوراني الذي يمر بهذه المستقيمات هي (-1,1,1) وان نصف زاوية رأسه هي الزاوية θ ، تجيبها يساوي $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

١٤- اذا كان المستقيم $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ هو واحد من مجموعة ثلاثة مولدات متعامدة للمخروط :

$$5yz-8zx-3xy=0$$

اوجد معادلات المولدين الآخرين .

١٥- اوجد معادلة مخروط دائري قائم نصف زاوية رأسه 60 درجة ورأسه في نقطة الاصل ومحوره يمر بنقطة الاصل وأمثال توجيهه (-1,-2,2) .

١٦- اوجد معادلة مخروط دوراني زاوية رأسه $2\theta=90°$ ورأسه نقطة الاصل ومحوره المستقيم $x=-2y=z$ ثم اثبت ان المستوي $z=0$ يقطع المخروط في خطين مستقيمين الزاوية بينهما تجيبها 4/5 .

١٧- اوجد معادلة مخروط دوراني رأسه بنقطة الاصل وزاوية رأسه $60°$ ومحوره المستقيم $6x=3y=2z$ ثم اثبت ان مقاطع المخروط بأي مستو يوازي المستوي $x=0$ هي قطوع زائدة وان مقاطعه بأي مستو يوازي المستوي $y=0$ او $z=0$ هي قطوع ناقصة.

١٨- سطح دوراني معادلته :

$$\frac{x^2+y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

اثبت أن مقطعه بمستو يوازي المستوي xoy وعلى بعد 2 منه هو دائرة. عيّن مركزها ونصف قطرها ، وان مقطعه بمستو يوازي المستوي zox وعلى بعد 2 منه هو قطع ناقص عيّن مركزه وطولي محوريه .

١٩- أ- اوجد معادلة السطح الذي يتولد عن دوران القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad z=0$$

حول احد محوريه .

ب- اوجد معادلة السطح الذي يتولد عن دوران القطع المكافئ :

$$y^2=2cz \quad , \; x=0$$

حول المحور oz .

٢٠- المستقيم D يمر من نقطة الاصل ويصنع مع المحور oy زاوية قدرها 60^o درجة أوجد معادلة السطح الذي يولده هذا المستقيم :

١- بدورانه حول المحور oy .

٢- بدورانه حول المحور oz .

٢١- لدينا المستقيم D المعين بالمعادلتين :

$$2x-y+z=16 \quad , \; x+3y-2z=3$$

فاذا دار هذا المستقيم حول المحور oz اوجد معادلة السطح الدوراني المتولد ، وعيّن نوع هذا السطح.

اختبارات عامة تشمل كافة أبحاث المقرر

الاختبـــار الاول

السوءال الاول :

لتكن النقطة $M(1,2,3)$ في الفراغ والمطلوب :

١- اوجد معادلة العمود النازل من M على المحور ox ثم معادلة العمود النازل من M على المحور oy .

٢- اوجد معادلة المستوي الذي يحوي العمودين السابقين.

السوءال الثاني :

١- اوجد معادلتي المسقط القائم للمنحني (C) المعين بالمعادلتين

$$z = 1 \ , \ 2x^2 + 3y - 4z^2 = 1$$

على المستوي $x + y + z - 1 = 0$

٢- اوجد معادلة مخروط رأسه النقطة $A(0,0,-1)$ ودليله المنحني (C) .

السوءال الثالث :

يفرض P مستو معادلته : $2x + 3y - 2z - 6 = 0$

ولتكن A,B,C نقاط تقاطعه مع المحاور الاحداثية .

١ـ اوجد معادلتي الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC .

٢ـ عيّن مسقط النقطة O على مستوي هذا المثلث .

السؤال الرابع :

١ـ اكتب معادلة كرة تمر بمبدأ الاحداثيات وتمس السطح

$$S = 3xy + 2y^2 + 3yz + 1 = 0$$

عند النقطة $(1,-1,0)$.

٢ـ اكتب معادلة سطح دوراني يولده المستقيم $z = 0$ ، $x + 2y - 2 = 0$ بدورانه حول المستقيم $z=1$ ، $x = 0$

الاختبار الثاني

السؤال الاول :

١ـ اوجد معادلة المستوي العمودي على المستوي

$$P \equiv 3x - 4y + 9 = 0$$

ويمر بخط تقاطع المستوي P مع المستوي $Q \equiv 7x - y - 12z + 16 = 0$

٢ـ عيّن مركز الكرة التي تمس داخلا اوجه رباعي الوجوه الذي وجوهه المستويات الآتية :

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$z = 0$$
$$x + y + z - 1 = 0$$

السؤال الثاني :

١ـ اثبت أن المستوي $4x + 6y - z + 14 = 0$ يمس السطح (S) المعين بالمعادلة $x^2 + 3y^2 + 2z = 0$ ثم عيّن نقطة التماس .

٢ـ اكتب معادلة المستوي القطبي الموافق للقطب $M_0(0,2,2)$ بالنسبة للكرة $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 1 = 0$.

السؤال الثالث :

١ـ في المستوي xoy لدينا دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها 2 سم ولتكن (S) كرة معادلتها :

$$x^2+(y-1)^2+z^2-2z=0$$

اكتب معادلة الكرة التي تمر بمحيط الدائرة (C) وتمس الكرة (S) .

٢- اكتب معادلة السطح الدوراني الناتج عن دوران المستقيم الآتي : $x+y-1=0$ ، $z-2=0$ حول المحور oy ثم عيّن نوع المجسم الحادث .

السؤال الرابع :

بفرض أن P مستو معادلته :

$$2x+3y-2z-6=0$$

ولتكن C,B,A نقاط تقاطعه مع المحاور الاحداثية ،والمطلوب:

١- اوجد معادلة كرة تمر برؤوس رباعي الوجوه $OABC$ حيث O مبدأ الاحداثيات .

٢- اوجد معادلة كرة تمر بمبدأ الاحداثيات وتمس السطح (S) الذي معادلته :

$$S \equiv 3xy+2y^2+3yz+1=0$$

عند النقطة (1,-1,0) .

الاختبار الثالث

السؤال الاول :

آ- عيّن منحى الشعاع الموازي للمستوي yoz والعمودي على المستقيم :

$$x=2t+1\ ,\quad y=t-1\ ,\quad z=t+2$$

ب- بفرض $\vec{oQ}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\ ,\ \vec{oP}=\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$

عيّن الشعاع $\vec{PQ}$ واحسب جيب تمام الزاوية التي يصنعها هذا الشعاع مع المحور ox .

السؤال الثاني :

اوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحولة M في الفراغ الثلاثي بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين $A(0,1,0)$ ، $B(0,-1,0)$ مساويا 6 .

السؤال الثالث :

أ- اكتب معادلة مستو يمر بالنقطتين $A(1,0,2)$ ، $B(0,1,3)$ ويعامد المستوي : $P\equiv x-2y+2z-1=0$

ب- عيّن المسقط القائم للنقطة $M(1,2,1)$ على المستقيم المعين بالمعادلة :

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{3}$$

السؤال الرابع :

أ- اثبت ان المستوي $x + 2y + 2z - 9 = 0$ يقطع الكــــرة $x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$ ثم عيّن مركز دائرة التقاطع واحسب طول نصف قطرها.

ب- بفرض (C) دائرة في الفراغ معينة بالمعادلتين : $z = 3,\ x^2 + y^2 = 9$ اكتب معادلة كرة تمر بمحيط هذه الدائرة وتعامد كرة مركزها $W\ (0,0,3)$ ونصف قطرها $R = 3$.

الاختبار الرابع

السؤال الاول :

١- اكتب معادلة مستو يمر بالنقطتين $(1,1,0)\ ,\ (0,0,2)$ ويوازي المحور ox .

٢- اثبت أن المستويات الثلاثة الآتية تتلاقى في خط مستقيم واحد :

$$3x-y+z+1 = 0\ ,\ x-y+z-1 = 0\ ,\ x+y-z+3 = 0$$

السؤال الثاني :

١- اكتب معادلة كرة تمر بمحيط الدائرة $z = 0\ , x^2+y^2=25$ وتمس الكرة $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

٢- اوجد معادلة المحل الهندسي لنقاط الفراغ التي مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين $A(0,3,0)\ ,\ B\ (0,-3,0)$ يساوي (8) ثم عيّن نوع هذا المحل.

السؤال الثالث :

١- اكتب معادلة مخروط رأسه النقطة (2,0,1) ودليله القطع الناقص $x = 0\ ,\ 9y^2+4z^2 = 36$

٢- مجموعة من القطوع الناقصة مراكزها على المحور oz معينة بالمعادلتين $z = \mu,\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \lambda$

اوجد معادلة السطح الذي تولده هذه القطوع عندما تتحرك مستندة على القطع الزائد $x=0\ ,\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

السوءال الرابع :

١- اكتب معادلة اسطوانة دليلها المنحني :

$$2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1$$

$$z = 1$$

ومولداتها تعامد المستوي :

$$x + y + z - 1 = 0$$

٢- اكتب معادلة مخروط رأسه النقطة $S(0,0,-1)$ ودليله المنحني السابق .

الاختبار الخامس

السوءال الاول :

بفرض $A(1,2,3)$ نقطة من الفراغ والمطلوب

١- ايجاد معادلة العمود النازل من A على المحور oy ثم ايجاد معادلة العمود النازل من A على المحور oz .

٢- اكتب معادلة المستوي الحاوي للعمودين السابقين.

السوءال الثاني :

المستويان :

$$P \equiv 4x - 3y + 7z = 0$$

$$Q \equiv 2x + y - 5z = 0$$

يتقاطعان بفصل مشترك D . ولتكن $A(5,0,2)$ نقطة واقعة في المستوي الثاني Q والمطلوب ايجاد معادلة مستقيم يمر من A ويقع في Q ، ويصنع مع المستوي الاول P زاوية اعظم ما يمكن.

السوءال الثالث :

اوجد معادلتي كرتين تمران بمحيط دائرة :

$$2x+4y+5z = 6 \quad , \quad x^2+y^2+z^2 = 1$$

وتمسان المستوي xoy .

السؤال الرابع :

اوجد معادلتي مستويين يوازيان المستوي :

$$x + y + z - 3 = 0$$

ويمسان الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 2z - 16 = 0$$

ثم عيّن نقطتي تماسهما مع الكرة.

الاختبار السادس

السؤال الاول :

لتكن $A\ (2,3,3)$ نقطة من الفراغ والمطلوب :

١- اوجد مساقط هذه النقطة على المحاور الاحداثية ثم مسقطها على المستوي :

$$P \equiv x - 2y + z - 5 = 0$$

٢- اكتب معادلة مستو يمر بالنقطة A ويوازي المستقيمين

$$D_1 :\quad x-1 = 2z-5 = 2z + 1$$

$$D_2 :\quad 3x+4 = 2y-4 = 3z + 6$$

السؤال الثاني :

لدينا السطح (S) معين بالمعادلات الوسيطية الآتية :

$$z = 1-\lambda \ ,\ z = \lambda \sin\theta \ ,\ x = \cos\theta$$

١- اوجد معادلة المستوي المماس لهذا السطح.

٢- اوجد معادلة مخروط رأسه نقطة الاصل O ودليله المنحني المعين بتقاطع السطحين :

$$x^2+y^2+z^2-16 = 0$$

$$9x^2-36y^2+4z^2-36 = 0$$

السوءال الثالث :

لدينا المستقيمان :

$$D_1 \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ z+2=0 \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x-2=0 \end{cases}$$

١- اكتب معادلة مستقيم يستند على هذين المستقيمين ويمر من النقطة $A\ (1,0,2)$ •

٢- احسب طول العمود المشترك بين هذين المستقيمين •

السوءال الرابع :

لدينا المنحني Γ المعين بالمعادلتين :

$$y^2+z^2-4x = 0$$

$$x + z - 4 = 0$$

١- اوجد معادلتي المسقط القائم لهذا المنحني على المستوي yoz

٢- استنتج أن هذا المسقط هو دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها •

الإختبار السابع

السوءال الاول :

أ- لتكن $A\ (2,3,3)$ نقطة في الفراغ والمطلوب تعيين مساقط هذه النقطة على المحاور الاحداثية ثم مسقطها على المستوي $P \equiv x-2y+z-5 = 0$

ب - اكتب معادلة مستو يمر من النقطة السابقة A ويوازي المستقيمين :

$$D_1 : x-1 = 2y-5 = 2z+1$$

$$D_2 : 3x+4 = 2y-4 = 3z+6$$

السوءال الثاني :

أ- اكتب معادلة كرة مركزها النقطة $C\ (2,3,4)$ وتمس المحور ox •

ب - عيّن مركز ونصف قطر دائرة تقاطع الكرة

$$S \equiv x^2+y^2+z^2+12x-2y-6z+30 = 0$$

مع المستوي $P \equiv x+y+2z+5 = 0$

السوءال الثالث :

بفرض (C) منحن فراغي معين بالمعادلتين :

$$f(x,y,z) = x^3-2yz+y+z-2 = 0$$

$$g(x,y,z) = 2x^2+3xy-2 = 0$$

والمطلوب : ايجاد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم لهذا المنحني عند النقطة $M_0(1,0,1)$

السؤال الرابع :

١- اكتب معادلة كرة مركزها النقطة $W(2,-4,3)$ وتمس المحور oz .

٢- اكتب معادلة اسطوانة مولداتها توازي المستقيم :

$$x = 2y = -z$$

ودليلها المنحني :

$$C: \quad \begin{aligned} & x^2+y^2+z^2 = 9 \\ & x-2y-z = 0 \end{aligned}$$

٣- اكتب معادلتي المسقط القائم للمنحني السابق (C) على المستوي yoz .

الاختبار الثامن

السؤال الاول :

اكتب معادلة مستو يمر بالنقطتين $A(2,0,1)$ ، $B(-1,2,0)$ ويوازي المحور oy .

السؤال الثاني :

اكتب معادلة مستقيم يمر بالنقطة $A(-1,2,-3)$ ويعامد المستقيم $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{3}$

السؤال الثالث :

اكتب معادلة كرة تمر بمحيط الدائرة :

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$z = 0$$

وتعامد الكرة :

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

السؤال الرابع :

اوجد معادلتي مستويين يمسان الكرة :

$$x^2+y^2+z^2 + 2x - 6y + 2z - 16 = 0$$

ويوازيان المستوي

$$x + y + z - 3 = 0$$

الاختبار التاسع

السؤال الاول :

١- اوجدالمعادلة الاساسية لمستقيم يمر من النقطة (2,3,1) ويعامد المستقيم المعين بالمعادلة :

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

٢- بفرض A (3,4,5) , B(-1,3,-7) نقطتان ثابتتان وM نقطة متحركة في الفراغ بحيث تحقق العلاقة $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=121$ اوجد المحل الهندسي للنقطة M وعيّن نوعه .

السؤال الثاني :

١- أوجد معادلة كرة تكون أحدى دوائرها العظمى الدائرة الاتية :

$$2x-2y+z-9 = 0 \ , \ x^2+y^2+z^2-25 = 0$$

٢- أوجد معادلة كرة تمر من الدائرة السابقة وتعامد الكرة الاتية :

$$x^2+y^2+z^2+2x-2z-5 = 0$$

السؤال الثالث :

لدينا المنحني الفراغي (C) معين بالمعادلات الوسيطية الاتية :

$$x = t\,e^{t+1} \ , \ y = 2e^{t+1}, \quad z = e^{t^3+1}$$

١- اوجد معادلة المستقيم المماس لهذا المنحني في النقطة الموافقة لـ t=-1 .

٢- اوجد معادلة المستوي الناظم لهذا المنحني عند النقطة تقاطعه مع المستوي oyz .

السؤال الرابع :

أوجد معادلة كرة تمر بالنقاط الاتية :

D (2,1,2) , C(1,0,1) , B(1,1,0) , A (0,1,1)

ثم احسب نصف قطرها.

الاختبار العاشـــــــر

السؤال الاول :

١- اكتب معادلة مستو يمر بالمستقيم :

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

ويوازي المحور oz .

٢- اكتب معادلة مستقيم يمر بالنقطـــــة $A\ (3,1,2)$

ويعامد المستقيم :

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5}$$

السؤال الثاني :

بفرض (C) دائرة في الفراغ معينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$z = 3$$

المطلوب :

اكتب معادلة كرة تمر بمحيط هذه الدائرة وتعامد كـــــرة مركزها $(0,0,3)$ ونصف قطرها $R = 3$.

السؤال الثالث :

اثبت أن المستوي $x + 2y + 2z = 0$ يقطع الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$$

ثم عيّن مركز دائرة التقاطع واحسب طول نصف قطرها.

السؤال الرابع :

١- المستوي P معين بالمعادلة $x + y + z - 2 = 0$

يقطع المحاور الاحداثية بالنقاط A,B,C . اكتب معادله كرة تمر بروؤس المثلث ABC بحيث يكون نصف قطرها اصغـــر ما يمكن .

٢- اكتب معادلة اسطوانة دليلها القطع الناقص :

$z = 0\ ,\ x^2+4z^2-16 = 0$ ومولداتها تعامد المستوي

$$x + y + z + 1=0$$

الاختبار الحادي عشر

السؤال الاول :

١- عيّن مسقط النقطة $A(2,3,1)$ على المستقيم D المعين بالمعادلة الاتية :

$$\frac{x+7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$$

٢- اكتب معادلتي مستقيم يمر من النقطة $M(1,1,0)$ ويقطع المستقيمين الاتيين :

$$D_1 \left| \begin{array}{l} x=0 \\ z-a=0 \end{array} \right. \qquad D_2 \left| \begin{array}{l} y=0 \\ z+a=0 \end{array} \right.$$

السؤال الثاني :

اكتب معادلة كرة تمر بالدائرة (C) المعينة بالمعادلتين:

$$x^2+y^2-4=0$$
$$z=2$$

وتمس سطح الكرة :

$$S \equiv x^2+(y-1)^2+z^2-2z=0$$

السؤال الثالث :

١- ليكن لدينا السطح (S) المعين بالمعادلة الاتية :

$$S \equiv x^2+y^2-z^2+x+y-3z+8=0$$

قطعنا هذا السطح بالمستوي $P \equiv x-z=0$ اوجد معادلتي مسقط المقطع على المستوي xoy ثم عيّن نوع هذا المسقط.

٢- اكتب معادلة سطح دوراني يولده المستقيم $x+y=0,\ z=1$ بدورانه حول المحور oy ثم عيّن نوع هذا السطح ومركز تناظره.

السؤال الرابع :

لتكن النقاط $C(0,0,a)$,$B(0,a,0)$, $A(a,0,0)$

١- اكتب معادلة الكرة المارة بالنقاط الثلاثة C,B,A والتي مركزها يقع في مبدأ الاحداثيات ثم اكتب معادلة الدائرة Γ التي تمر بالنقاط السابقة.

٢- اكتب معادلة الكرة التي تقبل الدائرة Γ دائرة عظمى فيها.

٣- اوجد المحل الهندسي لمراكز الدوائر Γ عندما تتحول a .

٤- برهن أن المحل الهندسي للدوائر Γ هو مخروط دوراني عندما تتحول a .

الاختبار الثاني عشـــــر

السؤال الاول :

لدينا المستقيم D المعين بالمعادلتين :

$$D \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

والمستوي P المعين بالمعادلة :

$$P \equiv x + 2y + 3z = 0$$

١- اكتب معادلة المستوي المار من D والعمودي على المستوي P .

٢- اكتب معادلتي المسقط القائم للمستقيم D على المستوي P.

٣- عيّن احدى النسب المثلثية للزاوية التي يصنعها المستقيم D مع المستوي P .

السؤال الثاني :

١- اكتب معادلة الكرة التي تمر بالدائرة (C) المعينة بالمعادلتين :

$$C \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

وتمر بالنقطة $M(0,1,3)$

٢- اكتب معادلة اسطوانة دليلها القطع الناقص :

$$4x^2 + z^2 - 8x + 4z + 4 = 0$$
$$y = 0$$

ومولداتها توازي المستقيم المار من النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,0)$.

السؤال الثالث :

M نقطة متحولة في الفراغ معينة وسيطيا بالمعادلات الآتية :

$$z = 1 \ , \ y = \sin t \ , \ x = \cos t$$

١- اكتب معادلة المستقيم المار من النقطة M والنقطة $P(1,0,2)$.

٢- اوجد المحل الهندسي لهذا المستقيم عندما تتحول t .

٣- عيّن المنحني C الذي ترسمه النقطة M عندما تتحول t .

السؤال الرابع :

١- اكتب معادلة مخروط رأسه $S(1,2,3)$

ودليله المنحني C المعين بالمعادلات :

$$z = t^3 + 3 \ , \ y = t^2 + 2 \ , \ x = t + 1$$

٢ـ اكتب معادلة السطح الدوراني الناتج عن دوران المستقيم

$$D \left| \begin{array}{l} x = a \\ z = my \end{array} \right.$$

حول المحور oz ثم عيّن نوع هذا المجسم .

الاختبار الثالث عشر

السؤال الاول :

لدينا المستويان :

$$P_1 \equiv 2x + y - z - 2 = 0$$

$$P_2 \equiv x - y - z - 3 = 0$$

والمطلوب :

١ـ عيّن الزاوية الكائنة بين المستويين .

٢ـ اكتب معادلة المستوي المار من النقطة (1,0,-2) والذي يعامد كلا من المستويين السابقين.

٣ـ اكتب معادلتي المستويين الموازيين للمستوي الاول (P_1) واللذان يبعدان بمقدار $\sqrt{6}$ عن نقطة الاصل .

السؤال الثاني :

١ـ بفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحركة في الفراغ بحيث يكون بعدها عن المحور oy يساوي ثلاثة امثال بعدها عن المحور oz اوجد المحل الهندسي لهذه النقطة وعيّن نوعه.

٢ـ اذا تحركت النقطة السابقة بحيث تكون نسبة بعدهما عن النقطة الثابتة $A(-2,2,-2)$ الى بعدها عن النقطة الثابتة $B(3,-3,3)$ تساوي $\frac{2}{3}$.

اثبت ان المحل الهندسي لهذه النقطة في هذه الحالة هو سطح

كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

السؤال الثالث :

بفرض (S) سطح من الدرجة الثانية معادلته

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 + z^2 - 4x + 4y - 4 = 0$$

١- اكتب معادلة المخروط المقارب لهذا السطح.

٢- عيّن الزاوية المناسبة لدوران جملة المحاور الاحداثية بحيث يحذف الحد المستطيلي من المعادلة السابقة.

السؤال الرابع :

لدينا الدائرة (C) معينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y = 0$$

$$x + y + z + 4 = 0$$

اكتب معادلة كرة تمر من الدائرة (C) وتقطع المستوي $x + y = 0$ وفق دائرة نصف قطرها 3 .

الاختبار الرابع عشر

السؤال الاول :

لدينا المستقيمان المتوازيان

$$(D_1) \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3}$$

$$(D_2) \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{3}$$

١- اوجد معادلة المستوي الذي يحوي هذين المستقيمين.

٢- اوجد البعد الكائن بين هذين المستقيمين.

السؤال الثاني :

بفرض A , B , C نقاط تقاطع المستوي $x + y + z = 1$ مع المحاور الاحداثية المتعامدة ox, oy, oz على الترتيب والمطلوب :

١- اوجد معادلة الكرة التي تمر برؤوس المثلث ABC والتي نصف قطرها اصغر ما يمكن.

٢- عيّن احداثيات مركز الكرة التي تمس وجوه الهرم OABC من الداخل.

السؤال الثالث :

اكتب معادلة مخروط رأسه نقطة الاصل ومولداته تمر من منحني تقاطع السطحين :

$$x^2+y^2+z^2=16$$

$$9x^2-36y^2+4z^2=36$$

السؤال الرابع :

١ـ اكتب معادلة السطح الدوراني المتولد عن دوران المستقيم (D) .

$$(D)\ \begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ z=0 \end{cases}$$

حول المحور oy .

٢ـ اكتب معادلة السطح الدوراني المتولد عن دوران القطع الناقص :

$$x^2+4z^2-16=0$$

حو المحور ox .

الاختبار الخامس عشر

السؤال الاول :

لدينا المستقيمان D_2, D_1 معادلتاهما :

$$D_1 \left| \ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z+1 \right.$$

$$D_2 \left| \begin{array}{l} x=-t+1 \\ y=t \\ z=2t-1 \end{array} \right.$$

١ـ اثبت أن هذين المستقيمين يقعان في مستو واحد، ثم اكتب معادلة هذا المستوي .

٢ـ اكتب معادلة المستوي المار من D_1 والعمودي على المستوي

$$P \equiv x-y+z=0$$

السؤال الثاني :

١ـ اكتب معادلة كرة مركزها النقطة $(3,-4,3)$ والتي تمس المحور oz .

٢ـ اكتب معادلة كرة تمر من محيط كل من الدائرتين الآتيتين :

$$C_1 \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 = 25 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

$$C_2 \left| \begin{array}{l} x^2+z^2 = 16 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

السؤال الثالث :

مجسم قطع مكافئ ناقص معادلته :

$$y^2 + z^2 = x$$

قطعنا هذا المجسم بالمستوي $x + 2y - z = 0$

فحصلنا على المنحني C والمطلوب :

١ـ ايجاد معادلتي المسقط القائم للمنحني C على المستوي xoy .

٢ـ اكتب معادلة اسطوانة دليلها المنحني السابق (C) ومولداتها تعامد المستوي P ذي المعادلة :

$$x + y + z - 2 = 0$$

السؤال الرابع :

١ـ اكتب معادلة السطح الدوراني الناتج عن دوران المستقيم D المعين بالمعادلتين $z - 2y = 0 \;,\; x - 2 = 0$ حول المحور oz .

٢ـ عيّن نوع هذا السطح.

الاختبار السادس عشر

السؤال الاول :

١ـ اثبت ان المستقيم :

$$2x + y = 0$$
$$y + z = 0$$

يقع على السطح

$$S \equiv 4x^2 + yz + y + z = 0$$

٢ـ بفرض P مستوي معين بالمعادلة :

$$x + 3y - z + 4 = 0$$

و D مستقيم معين بالمعادلتين :

$$D \left| \begin{array}{l} x - 2z - 35 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right.$$

المطلوب ايجاد معادلة مستقيم يقع في المستوي p ويتعامد مع المستقيم D في نقطة تقاطع D مع P .

السؤال الثاني :

١ـ عيّن مركز ونصف قطر دائرة تقاطع الكرة :

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$$

مع المستوي :

$$P = x + 2y + 2z - 9 = 0$$

٢- اوجد معادلة كرة تمس المستويين :

$$P_1 \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

$$P_2 \equiv 2x + y - 2z - 11 = 0$$

ومركزها يقع على المستقيم :

$$D \quad \begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

السؤال الثالث :

١- اوجد معادلة سطح دوراني محوره المستقيم Δ المعين بالمعادلتين :

$$x = 0 \ , \quad z = 2$$

والذي يمس سطح المخروط $S \equiv 2x^2 - y^2 + z^2 = 0$

وبيّن نوع هذا السطح الدوراني .

٢- اذا قطعنا المخروط السابق S بالمستوي $y=2$ فاثبت ان هذا المقطع هو قطع ناقص يطلب تعيين مركزه ومحرقيه.

السؤال الرابع :

١- اوجد معادلة سطح مخروطي رأسه النقطة $S(0,1,2)$ ودليله القطع المكافئ $x^2 = 2y$ الواقع في المستوي

. xoy

٢- اكتب معادلة سطح اسطواني دليله القطع المكافئ السابق ومولداته توازي المستقيم :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$$

■

الاختبار السابع عشر

السؤال الاول :

لدينا المستقيمان :

$$D_1 \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} x + y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

١- اكتب معادلة مستقيم يستند على هذين المستقيمين ويمر من النقطة $A(2;0,0)$

٢- اكتب معادلتي المسقط القائم للمستقيم D_1 على المستوي

$$P \equiv 2x + y + z - 1 = 0$$

السؤال الثاني :

١- اكتب معادلة كرة تمر بالدائرة (C) المعينة بالمعادلتين $x^2+y^2=4$, $z=2$ وتعامد الكرة (S) التي مركزها $W(0,0,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

٢- اوجد معادلتي كرتين تمر كل منهما بالدائرة (C') المعينة بالمعادلتين :

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y = 0$$
$$x + y + z + 4 = 0$$

ويقطعها المستوي $x+y=0$ وفق دائرة نصف قطرها 3.

السؤال الثالث :

١- اوجد معادلة مخروط رأسه النقطة $A(0,-2,1)$ ودليله القطع الناقص :

$$z = 0 \ , \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

٢- بفرض $C(\lambda,\mu)$ مجموعة منحنيات معينة بالمعادلتين :

$$C(\lambda,\mu) \begin{cases} x - z = \lambda \\ x^2 + y^2 = \mu \end{cases}$$

وليكن D مستقيما معادلتاه :

$$D \begin{cases} x + y - z = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

اوجد معادلة السطح الذي تولده المنحنيات $C(\lambda,\mu)$ شريطة ان تستند على المستقيم D.

السؤال الرابع :

١- لدينا الدائرة (C) معينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$z = 2$$

اوجد معادلة كرة تمر بمحيط هذه الدائرة وتعامد الكرة

التي مركزها النقطة $W(0,0,4)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

٢- عيّن مركز ونصف قطر دائرة تقاطع الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$$

مع المستوي :

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

الاختبار الثامن عشر

السؤال الاول :

اوجد نقاط تقاطع المستقيم الواصل بين النقطتين $B(-1,5,3)$, $A(4,-5,-2)$ مع السطح:

$$S \equiv 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 1 = 0$$

ثم اكتب معادلة المستوي المماس لهذا السطح عند النقطة $M(1,1,1)$

السؤال الثاني :

١- اوجد معادلة كرة تكون احدى دوائرها العظمى هي دائرة تقاطع الكرة :

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$$

مع المستوي :

$$P \equiv 2x - 2y + z - 9 = 0$$

٢- اوجد معادلة كرة تمر بالدائرة السابقة وتعامد الكرة.

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 5 = 0$$

السؤال الثالث :

لدينا المستقيمان :

$$D_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

$$D_2 : x = 1+2t \ , \ y = -1+t \ , \ z = 2+3t$$

١- اثبت ان المستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعيينها.

٢- اكتب معادلة المستوي الذي يحوي هذين المستقيمين .

السؤال الرابع :

١- اكتب معادلة كرة تمر بمحيط الدائرة (C) المعينة بالمعادلتين :

$$z = 0 \ , \ x^2 + y^2 = 4$$

وتمر من مركز الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 16 = 0$$

٢- اكتب معادلة اسطوانة مولداتها توازي المستقيم :

$$x = 2y = -z$$

ودليلها المنحني (C) المعين بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$x - 2y - z = 0$$

■

مراجع الكتاب

1. Analytic Geometry and calculus
   By Adams and White .
2. Analytic Geometry
   By A.C. Burdette
3. Analytic Geometry .
   By Protter and Morrey
4. Analytic Geometry
   By Thomas .
5. Analytic Geometry
   By J.H.Kindle, Schaum's outline series,New York,
6. Calculus with Analytic Geometry
   By Paul K.Ress
7. Calculus, V.I.II
   By Tom M,Apostol
8. Cours de Geometrie Analytique
   Par Papelier .
9. Cours de Mathematiques Superieures
   Par G,Ferroux

مدونة ملحوظة